GHEORGHE TH. GHEORGHIU

# MIC MEMORATOR DE MATEMATICĂ

GHEORGHE TH. GHEORGHIU

# MIC MEMORATOR DE MATEMATICĂ

CUPRINS

## 1. Aritmetică

§ 1.1. Numere reale ..... 9
§ 1.2. Operaţii cu numere reale ..... 19
§ 1.3. Rapoarte şi proporţii ..... 21
§ 1.4. Puteri şi radicali ..... 24

## 2. Algebră

§ 2.1. Mulţimi. Structuri ..... 29
§ 2.2. Polinoame. Fracţii algebrice ..... 37
§ 2.3. Analiza combinatorie. Binomul lui Newton ..... 43
§ 2.4. Ecuaţii particulare ..... 51
§ 2.5. Inegalităţi ..... 55
§ 2.6. Determinanţi ..... 58
§ 2.7. Matrice ..... 66
§ 2.8. Sisteme de ecuaţii liniare ..... 67

## 2. Trigonometrie

§ 3.1. Funcţii trigonometrice directe şi inverse ..... 71
§ 3.2. Formule şi ecuaţii trigonometrice.. 80
§ 3.3. Rezolvarea triunghiurilor..... 88
§ 3.4. Numere complexe ..... 95

## 4. Geometria euclidiană a planului

§ 4.1. Unghiuri. Drepte paralele ..... 101
§ 4.2. Cercul ..... 107
§ 4.3. Locuri geometrice ..... 114
§ 4.4. Triunghiuri ..... 117
§ 4.5. Patrulatere ..... 127
§ 4.6. Poligoane ..... 132
§ 4.7. Construcţii geometrice cu rigla şi compasul ..... 135

## 5. Geometria euclidiană a spaţiului

§ 5.1. Drepte şi plane ..... 147
§ 5.2. Corpuri solide determinate de drepte şi plane..... 153
§ 5.3. Suprafeţe. Corpuri rotunde ..... 157
§ 5.4. Arii şi volume ..... 160
§ 5.5. Transformări geometrice ..... 171

## 6. Geometria analitică plană

§ 6.1. Elemente de calcul vectorial .... 177
§ 6.2. Geometria analitică a dreptei .... 182
§ 6.3. Dreapta în plan ..... 183
§ 6.4. Cercul..... 192
§ 6.5. Conice ..... 197

## 7. Analiză matematică

§ 7.1. Funcţii. Şiruri..... 207
§ 7.2. Funcţii elementare..... 211
§ 7.3. Noţiunea de limită..... 220
§ 7.4. Funcţii continue..... 225
§ 7.5. Funcţii derivabile ..... 227
§ 7.6. Proprietăţile funcţiilor derivabile: extreme, nedeterminări, grafice.... 232
§ 7.7. Ecuaţii algebrice ..... 240
§ 7.8. Primitive ..... 248
§ 7.9. Integrale definite. Aplicaţii geometrice ..... 253
§ 7.10. Ecuaţii diferenţiale ..... 256

## 8. Mecanică

§ 8.1. Elemente de statică..... 259
§ 8.2. Elemente de cinematică..... 267
§ 8.3. Elemente de dinamică ..... 269

## 9. Calculul probabilităţilor

§ 9.1. Evenimente, probabilităţi ..... 273
§ 9.2. Scheme clasice de probabilitate.... 277
§ 9.3. Variabile aleatoare. Valori tipice.. 279
§ 9.4. Elemente de statistică matematică 283

# 1. ARITMETICĂ

## § 1.1. Numere reale

### 1. Mulțimi de numere

*T. 1*

| Numele | Simbolul | Mulțimea |
|---|---|---|
| Numere naturale | $N$ | $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ |
| — | $N_0$ | $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ |
| Numere impare (fără soț) | — | $1, 3, 5, \ldots, 2p+1, \ldots,$ |
| Numere pare (cu soț) | — | $2, 4, 6, \ldots, 2p, \ldots$ |
| Numere întregi | $Z$ | $\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ |
| Numere prime | — | Numerele naturale care nu au ca divizori decît pe 1 și pe ele însele; *șirul numerelor prime este infinit;* numerele prime mai mici ca 100 sînt: |

| Numele | Simbolul | Mulțimea |
|---|---|---|
| | — | 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 |
| Numere raționale (comensurabile sau fracționare) | $Q$ | $a=n/m$ $(n, m\in Z, m\neq 0)$ (conține numerele întregi pentru $m = 1$) |
| Numere iraționale (incomensurabile) | — | Numerele reale care nu pot fi exprimate printr-un întreg sau prin cîtul a doi întregi |
| Numere reale | $R$ | Reuniunea mulțimilor numerelor raționale și iraționale pozitive sau negative inclusiv 0. |
| | $R^+, R_+$ | Mulțimea numerelor reale pozitive |
| | $R^-, R_-$ | Mulțimea numerelor reale negative |
| | $R^*$ | Mulțimea numerelor reale diferite de zero |
| | $R_+^*$ | Mulțimea numerelor reale strict pozitive |
| Numere complexe | $C$ | Pentru proprietăți și definiții (§ 3.4) |

*Egalitatea* în aritmetică, ca şi în algebră, este notată cu semnul $=$ şi se bucură de proprietăţile:

a) $n = n$ (se zice că este *reflexivă*).

b) Dacă $n = m$, rezultă $m = n$ *(simetrică)*.

c) Dacă $n = m$ şi $m = p$, atunci $n = p$ *(tranzitivă)*.

Pentru că egalitatea se bucură de aceste proprietăţi este o *relaţie de echivalenţă* (§ 2.1.1)*). Egalităţile sînt de două feluri: *identităţi*, care sînt adevărate pentru orice valori date literelor ce o compun, şi *ecuaţii*, care sînt adevărate numai pentru anumite valori date unor litere (numite *necunoscute*) din cele ce o compun. Egalităţile pot fi adunate (sau scăzute), înmulţite (sau împărţite, presupunînd că ambele părţi sînt diferite de zero) parte cu parte.

*Inegalitatea* $a<b$ (sau $b>a$) exprimă faptul că *a este mai mic decît b*, (sau *b este mai mare decît a*). Inegalităţile sînt *tranzitive*: dacă $a<b$, $b<c$ rezultă $a<c$.

Două, sau mai multe egalităţi de *acelaşi sens* au aceleaşi proprietăţi ca şi egalităţile cu deosebirea esenţială că înmulţind o inegalitate cu un număr negativ, îşi schimbă sensul (deci două inegalităţi de acelaşi sens nu pot fi scăzute între ele). Inegalităţile care au loc numai pentru anumite valori date unor litere se numesc *inecuaţii*.

*) Notaţia (§ 2.1) înseamnă „v. paragraful 2.1;“ notaţia (§ 2.1.1) înseamnă „v. 1 din acelaşi paragraf.“

**2. Mulțimea numerelor naturale** poate fi definită prin următoarele axiome:

a) Există numărul 1 care nu are un precedent.

b) Orice număr natural $n$ are un succesor $n'$ și numai unul.

c) Dacă $n' = m'$ și precedentele lor se bucură de aceeași proprietate, adică $n = m$.

d) Orice mulțime de numere naturale care conține pe 1 și care, o dată cu fiecare număr al său, conține și pe următorul $n'$, conține toate numerele naturale.

Luînd aceste proprietăți ca axiome *(axiomele lui Peano)* putem defini operațiile cu aceste numere, cum și toate proprietățile lor. Pe ultima axiomă se bazează *metoda inducției complete* sau *din aproape în aproape*. Acest raționament constă în a arăta că dacă o formulă $E(n)$ este adevărată și pentru $E(n')$, este suficient s-o verificăm pentru $n = 1$, pentru a afirma că este adevărată pentru orice valoare a lui $n$.

**3. Cîteva proprietăți ale numerelor naturale.**

a) Dacă un număr $d \neq 1$, împarte exact pe $n$, vom spune că $d$ este *divizor* al lui $n$ și vom avea $n = dm$, unde $m \in N$; invers, $n$ se numește *multiplu* al lui $d$. În (T. 2) avem cîteva reguli simple de *divizibilitate*.

| Divizorul | Regula |
|---|---|
| 2 | Ultima cifră să fie 0 sau pară. |
| 3 (sau 9) | Suma cifrelor să fie divizibilă cu 3 (respectiv 9) |
| 5 | Ultima cifră să fie 0 sau 5 |
| 4 (sau 25) | Ultimele două cifre să fie 00 sau să formeze un număr divizibil cu 4 (respectiv 25) |
| 8 (sau 125) | Ultimele trei cifre să fie 000 sau să formeze un număr divizibil cu 8 (respectiv 125) |
| 11 | Diferența dintre suma cifrelor de rang par și cea a numerelor de rang impar să fie 0 sau să se dividă cu 11 |

b) Dacă $n_1 > n_2$, o relație de forma

$$(1) \qquad \boxed{n_1 = n_2 \cdot q + r \qquad (r < n_2),}$$

vom spune că definește *împărțirea* lui $n_1$ *(deîmpărțit)* prin $n_2$ *(împărțitor)*, în care $q$ este *citul*

iar $r$ *restul*. Dacă $r = 0$, se zice că împărţirea se face *exact*.

c) Orice număr natural care nu este prim, se poate *descompune în factori primi*

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}, \tag{2}$$

unde $p_1$, $p_2$, ..., $p_r$ sînt numere prime iar $m_1$, $m_2$, ..., $m_r$ numere naturale. Descompunerea este unică. Orice divizor al lui $n$ va fi de aceeaşi formă cu (2) în care puterile factorilor primi sînt 0 sau mai mici decît puterile corespunzătoare din (2).

**4.** Fiind date două numere naturale $n_1$, $n_2$ ($n_1 < n_2$), un număr $d$, care le împarte exact pe amîndouă, se numeşte un *divizor comun* al lor. Două numere care n-au nici un divizor comun diferit de 1, se zice că sînt *prime între ele*. *Cel mai mare divizor comun* a două numere (c.m.m.d.c) poate fi obţinut prin una din metodele:

a) Dacă cele două numere sînt descompuse în factori primi, c.m.m.d.c va fi produsul tuturor factorilor primi comuni la puterile cele mai mici.

b) În caz contrar, se fac următoarele împărţiri succesive:

$$n_2 = n_1 c_1 + r_1, \quad n_1 = r_1 c_2 + r_2, \quad r_1 = r_2 c_3 + r_3, \dots$$

Dacă $r_{n+1} = 0$, atunci $r_n$ = c.m.m.d.c. Dacă la împărţirea lui $r_h$ cu $r_{h+1}$ ($h < n$) observăm că

aceste două numere sînt prime între ele, putem afirma că şi cele date iniţial au aceeaşi proprietate. Dacă facem împărţirile pînă la capăt şi ultimul rest este 1, înseamnă că cele două numere sînt prime între ele *(algoritmul lui Euclid)*.

C.m.m.d.c al mai multor numere naturale $n_1$, $n_2$, $n_3$,... se calculează prin aceleaşi metode. În prima metodă aplicăm aceeaşi regulă iar în a doua, calculăm c.m.m.d.c al primelor două numere, fie $d_1$; apoi calculăm c.m.m.d.c al numerelor $d_1$ şi $n_3$, fie $d_2$; etc. Ultimul c.m.m.d.c va fi c.m.m.d.c al tuturor numerelor.

**5.** Dacă un număr natural $n$ se divide cu $n_1$ şi $n_2$, se zice că $n$ este un *multiplu comun* al numerelor $n_1$ şi $n_2$. *Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c)* a două numere se poate calcula prin una din metodele:

a) Dacă numerele sînt descompuse în factori primi, c.m.m.m.c va fi produsul tuturor factorilor comuni şi necomuni la puterile cele mai mari.

b) În caz contrar, se calculează c.m.m.d.c $= d$ al numerelor şi fie $n_1 = dc_1$, $n_2 = dc_2$. Atunci c.m.m.m.c $= dc_1c_2$. Dacă numerele sînt prime între ele, c.m.m.m.c $= n_1n_2$.

C.m.m.m.c al mai multor numere se calculează prin cele două metode urmînd aceleaşi reguli.

**6. Congruențe.**

Două numere naturale $n_1$, $n_2$ sînt *congruente în raport cu modulul* $m$, dacă împărțite cu $m$ dau același rest. Vom scrie

$$n_1 \equiv n_2 \pmod{m}; \tag{3}$$

acest lucru se întîmplă dacă și numai dacă diferența $n_1 - n_2$ este un multiplu de $m$.

Congruențele au aceleași proprietăți cu egalitățile (§ 1.1.1).

**7. Cîteva proprietăți ale fracțiilor.**

a) Fracția $n/m$ ($n$ se numește *numărător*, $m$ — *numitor* și ambii — *termenii* fracției) se zice că este *ireductibilă* dacă $n$ și $m$ sînt primi între ei. Dacă $d$ este c.m.m.d.c al lui $n$, $m$, adică $n = dn_1$, $m = dm_1$, atunci $n/m = n_1/m_1$, ultima valoare este fracția *simplificată* și reprezintă forma ei ireductibilă. Operația inversă simplificării $n/m = np/mp$ se numește *amplificare*. Dacă $n > m$ și $n = mq + r$, atunci se scrie $\frac{n}{m} = q\,\frac{r}{m}$, unde $q$ reprezintă întregii fracției.

b) Dacă o fracție are ca numitor pe $10^n (n \in N)$, atunci fracția se numește *zecimală* și poate fi reprezentată prin numărul de la numărător căruia îi punem o virgulă după $n$ cifre de la dreapta

spre stînga; dacă numărul de la numărător are $m<n$ cifre, atunci în faţa lui se aşază $n - m + 1$ zerouri şi apoi se pune virgula ca la cazul precedent. O fracţie care nu este zecimală se numeşte *ordinară*.

c) *O fracţie zecimală periodică simplă* are după virgulă, un număr natural, numit *perioadă*, repetat de o infinitate de ori (0,521521...); o *fracţie periodică mixtă* conţine după virgulă un număr natural fix, după care apare o perioadă (0,178181,..). O fracţie ordinară ireductibilă se transformă în fracţie periodică simplă, dacă numitorul ei nu are factorii 2 şi 5; se transformă în fracţie periodică mixtă dacă printre factorii primi ai numitorului se găseşte 2 sau 5. În acest ultim caz, partea neperiodică va avea $m$ cifre, $m$ fiind cel mai mare dintre exponenţii lui 2 şi 5. Invers, avem

$$(4) \qquad \boxed{0,nn\ldots = \frac{n}{10^p - 1}},$$

$$(5) \qquad \boxed{0,mnn\ldots = \frac{1}{10^q}\left(m + \frac{n}{10^p - 1}\right)},$$

unde $p$ este numărul cifrelor lui $n$, iar $q$ numărul cifrelor lui $m$.

**8.** a) Numerele iraţionale scrise sub formă zecimală au o infinitate de zecimale şi nu sînt periodice.

b) Numerele iraţionale sînt de două tipuri: *algebrice* cînd pot fi considerate ca rădăcini ale unei ecuaţii $P(x)=0$, unde $P$ este un polinom cu coeficienţi raţionali (§ 7.7) (ex: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[4]{2}, ..$), *transcendente* în caz contrar (ex: $\pi$, $e$,..).

c) Numerele iraţionale sînt folosite în calcul prin valorile lor *aproximative* exprimate prin fracţii zecimale (ex: $\sqrt{2} = 1{,}41...$, $\sqrt{3} = 1{,}73...$, $e = 2{,}718...$, $\pi = 3{,}14...$). În general, dacă un număr iraţional $a$ se scrie sub forma $\alpha < a < \beta$, unde $\alpha$, $\beta$ sînt fracţii zecimale, atunci $\alpha$ va reprezenta o valoare *prin lipsă* a lui $a$, iar $\beta$ o valoare *prin adaos*. *Eroarea* pe care o facem luînd pentru $a$ una din aceste valori, este mai mică decît $\varepsilon = \beta - \alpha$.

**9.** O mulţime (§ 2.1) este *numărabilă* cînd poate fi pusă în *corespondenţă biunivocă* (§ 7.1.1 c) cu mulţimea numerelor naturale (de ex., mulţimea $Z$ este numărabilă). Mulţimea numerelor reale dintr-un interval $[a, b]$ *nu* este numărabilă; se zice că are *puterea continuului*.

**10.** Scrierea numerelor zecimale se face în baza 10, adică se scriu sub forma

$$N = 10^n a_0 + 10^{n-1} a_1 + \ldots + 10 a_{n-1} + a_n \qquad (0 \leqslant a_k \leqslant 9) \tag{6}$$

sau sub formă prescurtată $a_0a_1...a_n$. Această scriere este unică.

Exprimarea unui număr în baza $B$ se face scriindu-l sub forma

$$(6') \quad N = B^n b_0 + B^{n-1} b_1 + ... + B b_{n-1} + b_n = \\ = (b_0 b_1 ... b_n)_B \quad (0 \leqslant b_k \leqslant B - 1).$$

Scrierea este unică și se procedează astfel: împărțim cu $B$ și fie $N = BN_0 + b_0$; împărțim din nou $N_0 = BN_1 + b_1$, ș.a.m.d. Resturile succesive sînt cifrele numărului $N$ scris în baza $B$.

Exprimarea unui număr în baza 2 se face numai cu ajutorul cifrelor 0 și 1. Această scriere este folosită în calculatoare electronice.

## § 1.2. Operații cu numere reale

**1.** Operațiile de adunare, scădere, înmulțire și împărțire ale numerelor întregi, le presupunem cunoscute. Orice număr întreg poate fi scris sub formă de fracție al cărui numărător este el însuși, iar numitorul 1.

**2.** Suma sau diferența fracțiilor care au același numitor, este o fracție care are același numitor iar ca numărător suma sau diferența numărătorilor. Dacă fracțiile nu au același numitor, se aduc la același numitor calculînd c.m.m.m.c (§ 1.1.5) al numitorilor inițiali și apoi se procedează ca mai sus.

Înmulțirea și împărțirea a două fracții se face după regulile

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\ ;\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}\ .$$

După oricare din aceste operații, rezultatul trebuie simplificat.

Dintre două fracții care au același numitor, aceea care are numărătorul mai mare este mai mare. Dintre două fracții care au același numărător, aceea care are numitorul mai mic este mai mare. Pentru a compara două fracții între ele, le aducem în prealabil la același numitor (sau la același numărător).

**3.** Operațiile de adunare și înmulțire a numerelor reale, se bucură de următoarele proprietăți.

| | |
|---|---|
| (7) | $a+b$ și $ab$ sînt numere reale (propriet. de închidere față de adunare și înmulțire). |
| (8) | $a+b=b+a$; $ab=ba$ (legea comutativității). |
| (9) | $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a(bc)=(ab)c$ (legea asociativității). |
| (10) | $a(b+c)=ab+ac$ (legea distributivității). |
| (11) | $a+0=a$; $a.0=0$; $a.1=a$. |
| (12) | $a+(-a)=0$; $a(1/a)=1$ $(a\neq 0)$. |
| (13) | $a+c=b+c$ cere $a=b$, } (legea |
| (14) | $ac=bc$ cere $a=b$ $(c\neq 0)$ } reducerii). |

Împărţirea cu „0“ nu are sens.

4. **Valoarea absolută** a unui număr real $a$ este definită prin

$$(15)\qquad |a| = \begin{cases} a \text{ dacă } a > 0, \\ -a \text{ dacă } a < 0, \\ 0 \text{ dacă } a = 0, \end{cases}$$

încît avem întotdeauna $|a| \geqslant 0$. Avem proprietăţile:

$$(16)\qquad |a| = 0 \text{ implică } a = 0.$$

$$(17)\qquad ||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

$$(18)\qquad |ab| = |a||b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

Inegalităţile: $|a| \leqslant A$, $|b| \leqslant B$ implică

$$(19)\qquad |a| + |b| \leqslant A + B \text{ şi } |ab| \leqslant AB.$$

$$(19')\qquad |a - b| < c \text{ este totuna cu } b - c < a < b + c \text{ şi invers.}$$

## § 1.3. Rapoarte şi proporţii

1. *Raportul* a două mărimi $a$, $b$ de aceeaşi natură, este cîtul numerelor abstracte care reprezintă aceste mărimi măsurate cu o aceeaşi unitate de măsură, şi-l vom reprezenta prin $a/b$.

2. Se numeşte *proporţie* egalitatea a două rapoarte $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; numerele $a$ şi $d$ se numesc *extremi*, $b$, $c$ se numesc *mezi*, iar toate numerele $a$, $b$, $c$, $d$ se numesc *termenii* proporţiei.

3. *Proprietăţi fundamentale.*

a) Dacă schimbăm mezii sau extremii între ei, proporţia nu se schimbă.

b) Inversa unei proporţii $\left(\frac{b}{a} = \frac{d}{c}\right)$ este tot o proporţie.

c) Produsul mezilor este egal cu produsul extremilor $(ad = bc)$.

d) Orice relaţie de forma $ad = bc$ ($a$, $b$, $c$, $d$ diferiţi de zero) se poate scrie sub formă de proporţie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

4. Dacă $b = c$, atunci $b^2 = ad$ $(b = \sqrt{ad})$ şi $b$ se numeşte *media geometrică* a numerelor $a$, $d$. Oricare din cele patru numere $a$, $b$, $c$, $d$ se numeşte *a patra proporţională* a celorlalte trei.

5. Din proporţia

(20) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

rezultă proporțiile echivalente

$$(21)\quad \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{a \pm kb}{b} = \dfrac{c \pm kd}{d}; \quad \dfrac{a}{a \pm kb} = \dfrac{c}{c \pm kd}; \\ \dfrac{a \pm kc}{b \pm kd} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}; \quad \dfrac{a + kb}{a - kb} = \dfrac{c + kd}{c - kd}. \end{array}}$$

Presupunem că toate combinările făcute la numitor nu sînt nule.

6. Într-un șir de rapoarte egale, avem proprietatea

$$(22)\quad \boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n}{b_1 \pm b_2 \pm \ldots \pm b_n}.}$$

7. Două numere $x$, $y$ se zice că sînt *direct proporționale* dacă $x = ky$. Iar dacă $(x', y')$, $(x'', y'')$ sînt două rînduri de valori ale celor două numere, atunci $x'' / x' = y'' / y'$. Analog, se zice că două numere sînt *invers proporționale* dacă $x = k / y$; cu aceleași notații, avem $x'' / x' = y' / y''$.

8. Pentru a împărți un număr $A$ în *părți proporționale* cu numerele $m_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, vom nota părțile cu $x_i$ și vom scrie

$$(23)\quad \boxed{\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \ldots = \frac{x_n}{m_n}; \; x_i = \frac{Am_i}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.}$$

Analog, pentru a împărți un număr $A$ în *părți invers proporționale* cu numerele $m_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, vom nota părțile cu $x_i$ și vom scrie

$$(24)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\frac{1/x_1}{m_1} = \frac{1/x_2}{m_2} = \ldots = \frac{1/x_n}{m_n}; \\ &x_i = \frac{\dfrac{A}{m_i}}{\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \ldots + \dfrac{1}{m_n}}. \end{aligned}}$$

## § 1.4. Puteri și radicali

**1.** Prin „puterea $n^a$“ a unui număr $a$ înțelegem numărul

$$(25)\qquad \boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n} \quad (n \in N).}$$

$a$ se numește *baza*, iar $n \in N$ *exponent*. Prin „*rădăcina de ordinul n*“ sau „*radical de ordinul n*“ a unui număr $a > 0$, înțelegem un număr (în general irațional), pe care-l notăm cu

(25′)

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad (a > 0)}$$

și care se bucură de proprietatea

(26)

$$(\sqrt[n]{a})^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$$

| | |
|---|---|
| $10^{12}$ | = 1 bilion |
| $10^{9}$ | = 1 miliard |
| $10^{6}$ | = 1 milion |
| $10^{3}$ | = 1 mie |
| $10^{2}$ | = 1 sută |
| $10^{1}$ | = zece |
| $10^{0}$ | = unitatea |
| $10^{-1}$ | = o zecime |
| $10^{-2}$ | = o sutime |
| $10^{-3}$ | = o miime |
| $10^{-6}$ | = o milionime |

Mai general, vom nota cu

(27) $$\boxed{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n, \quad (a > 0)}$$

și de asemenea

(28) $$\boxed{a^{\circ} = 1, \; a^{-p} = 1/a^p, \; (a > 0) \; (p \in Q).}$$

Prin aceste egalități, s-au definit puterile raționale ale numerelor reale strict pozitive. În (T. 3) se găsesc puterile lui 10 mai importante.

**2.** Avem proprietăţile ($a$, $b>0$):

(29) $a^n a^m = a^{n+m}$; $(a^n)^m = a^{nm}$; $a^n/a^m = a^{n-m}$.

(30) $(ab)^n = a^n b^n$; $(a/b)^n = a^n/b^n$.

(31) $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$; $\sqrt[m]{a/b} = \sqrt[m]{a^n}/\sqrt[m]{b}$.

(32) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; $\sqrt[m]{ab^m} = b\sqrt[m]{a}$;
$\sqrt[mp]{a^{mq}} = \sqrt[p]{a^q}$.

*Observaţie.* Simbolurile „putere“ şi „radical“ nu sînt distributive, adică

(33) $(a+b)^n \neq a^n + b^n$; $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$
$(a,\ b>0,\ n\neq 1)$.

**3.** Dacă o fracţie are radicali la numitor, prin amplificarea fracţiei se poate face ca numitorul să nu mai conţină radicali: se spune că s-a *raţionalizat numitorul.*

Avem exemplele

(34) $$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b},\quad \frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c},$$
$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}} = \frac{a(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}{b\pm c}.$$

Radicalul suprapus $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ se poate transforma în radicali simpli în ipoteza că $A^2 - B = C^2$; avem formulele

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{1}{2}(A + C)} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(A - C)}. \tag{35}$$

**4.** Pentru extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr se procedează astfel.

a) Se împarte numărul în grupe de cîte două cifre de la dreapta la stînga şi apoi sînt considerate grupele de la stînga la dreapta în ordine naturală.

b) Se caută cifra $n_1$ a cărui pătrat este cel mai mare care intră în prima grupă şi care va fi prima cifră a rădăcinii pătrate.

c) Scădem pe $n_1^2$ din prima grupă.

d) La rezultat adăugăm grupa următoare şi obţinem un număr $A$.

e) La numărul $2n_1$ alăturăm un număr $n_2$ astfel ca $(2n_1)n_2 \times n_2 < A$ ($n_2$ este cel mai mare număr care se bucură de această proprietate).

f) $n_2$ va fi a doua cifră a rădăcinii.

g) Formăm numărul $A - (2n_1)n_2 \times n_2 = A_1$ şi continuăm cu $A_1$ aşa cum am procedat cu $A$ scăzînd $(2n_1n_2)n_3 \times n_3$, ş.a.m.d.

Dacă ultimul rest este nul, extragerea de rădăcină pătrată se face exact şi numărul se zice *pătrat per-*

*fect*; dacă nu, se pune o virgulă și se adaugă atîtea grupe de 00 cîte zecimale exacte dorim să scoatem. Un exemplu este dat în (T. 4) în care s-a scos rădăcina pătrată cu două zecimale exacte.

*T. 4*

| | |
|---|---|
| $\sqrt{54123,0000}$ | 232,64 |
| 4 | $43 \times 3 = 129$ |
| 141 | $462 \times 2 = 924$ |
| 129 | $4646 \times 6 = 27876$ |
| 1223 | $46524 \times 4 = 186096$ |
| 924 | |
| 29900 | |
| 27876 | |
| 202400 | |
| 186096 | |
| 16304 | |

Proba se face ridicînd la pătrat numărul obținut și adăugînd restul rămas; rezultatul trebuie să fie numărul dat. (În T.4 avem $232,64^2 + 1,6304 = 54123$).

*Observație*. Pentru ca un număr natural să fie un pătrat perfect, trebuie ca ultima cifră să fie 0, 1, 4, 5, 6, 9.

# 2. ALGEBRĂ

## § 2.1. Mulțimi. Structuri

1. După *Cantor*, „o mulțime este o asamblare de anumite obiecte, bine distincte, ale intuiției sau gîndirii noastre, într-un singur tot“*). Exemple de mulțimi avem la § 1.1.1.

În calcule, o mulțime poate fi reprezentată printr-o literă mare $E$, sau prin $\{a, b, c, ..\}$ unde se pun în evidență elementele ei, sau prin $\{x \mid p\}$ unde $x$ este un *element curent* iar $p$ este proprietatea prin care se definește mulțimea. În interpretarea intuitivă a proprietăților unei mulțimi, se folosește *schema lui Euler* (fig. 1) în care se reprezintă mulțimea de bază $E$ și diferite submulțimi ale ei prin punctele interioare unei curbe închise. În T. 5 sînt trecute primele definiții care se folosesc în calcule.

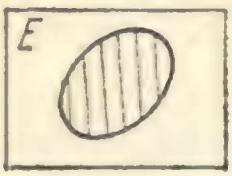
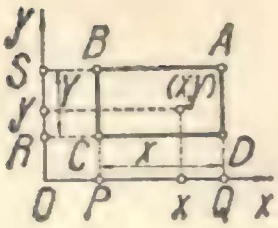
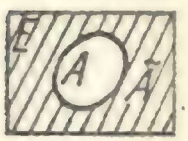
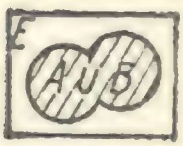
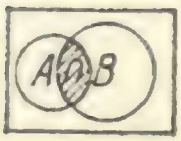
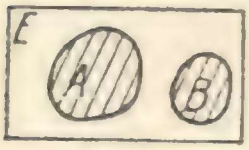


Fig. 1

*) Textul original: „Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (den Elementen der Menge) unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“.

| Simbolul | Definiție, proprietăți |
|---|---|
| $\rightarrow$ | Semnul deducției logice |
| $\longleftrightarrow$ | Semnul echivalenței logice |
| $\forall$ | „oricare ar fi“ sau „pentru orice“ |
| $\exists a$ | „există cel puțin un $a$ astfel ca“ |
| $\sim$ | Semnul *relației de echivalență* (are proprietățile: $a \sim a$ (reflexivă), $a \sim b \longleftrightarrow b \sim a$ (simetrică), $a \sim b$, $b \sim c \longleftrightarrow a \sim c$ (tranzitivă) |
| $X \times Y$  Fig. 2 | *Produsul cartezian* al mulțimilor $X$, $Y$ și reprezintă mulțimea $\{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$. În figură, punctele dreptunghiului $ABCD$ reprezintă produsul cartezian al punctelor mulțimilor definite prin segmentele $PQ$, $RS$. Produsul mai multor mulțimi se notează cu $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ |
| $a \in E$ | $a$ aparține lui $E$ |
| $a \notin E$ | $a$ nu aparține lui $E$ |

| Simbolul | Definiție, proprietăți |
|---|---|
| $B \subseteq A$ Fig. 3 | Mulțimea $B$ *inclusă* sau identică cu $A$; $A$ include sau este identică cu $B$. Aceasta înseamnă că dacă $b \in B$, atunci și $b \in A$. |
| $B \subset A$ | Incluziune strictă, adică există și elemente $a \in A$ astfel ca $a \notin B$. $B$ se numește *submulțime* a lui $A$. |
| $\bar{A}$ (sau $\mathbf{C}A$) $(x \notin A,$ $x \in M)$   Flg. 4 | Reprezintă *complementara* lui $A$ față de $E$ și în figură este reprezentată prin partea haşurată. |
| $\varnitset$ | Mulțimea vidă. |
| $A \cup B$   Fig. 5 | *Reuniunea* mulțimilor $A$, $B$; reuniunea mai multor mulțimi se notează cu $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. |

| Simbolul | Definiție, proprietăți |
|---|---|
| $A \cap B$   Fig. 6 | *Intersecția* mulțimilor $A$, $B$; intersecția mai multor mulțimi se notează cu $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ |
| $A \cap B = \varnothing$   Fig. 7 | Mulțimi disjuncte. |

**2.** O mulțime $\mathcal{B}$ înzestrată cu operațiile $\cup$, $\cap$, $\sim$ se numește *algebră Boole* dacă, cu notațiile precedente, are următoarele proprietăți.

Pentru toate mulțimile $A$, $B$, $C \in \mathcal{B}$ avem:

| | |
|---|---|
| (36) | $A \cup B \subseteq E$; $A \cap B \subseteq E$, $\tilde{A} \subseteq E$. |
| (37) | $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea). |
| (38) | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociativitatea). |

(39) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(distributivitatea).

(40) $A \cup A = A \cap A = A$ (idempotența).

(41) $A \cup B = B$ dacă și numai dacă $A \cap B = A$
(compatibilitatea).

(42) $A \cup \tilde{A} = E, \quad A \cap \tilde{A} = \varnothing$.

Luînd aceste proprietăți ca axiome (nu sînt toate independente între ele) deducem de asemenea:

(43) $A \cup E = E$; (43′) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(44) $A \cap E = A$; (44′) $A \cup \varnothing = A$.

(45) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$
(absorbția).

(46) $A \cup B = A \cap B \to A = B$.

(47) $A \subseteq B$ și $B \subseteq A \to A = B$.

(48) $A \cap B = A$ sau (48′) $A \cup B = B \to A \subseteq B$

(49) $\varnothing \subset A \subset E$.

(50) $\tilde{\tilde{A}} = A$; (50′) $\tilde{E} = \varnothing$; (50″) $\tilde{\varnothing} = E$.

(51) $\overline{A \cup B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$; (51′) $\overline{A \cap B} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$
(Morgan).

(52) $\tilde{A} \cup B = E; \quad \tilde{A} \cap B = \varnothing \to A = B$.

(53) $A \cup (\tilde{A} \cap B) = A \cup B$;

(53′) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap \tilde{C}) =$
$= (A \cap C) \cup (B \cap \tilde{C})$.

**3.** Fie $a$, $b$ două elemente oarecare aparţinînd unei mulţimi nevide $E(\forall a,\ b \in E)$; o operaţie care asociază acestui cuplu un nou element $c \in E$, se zice că este *operaţie internă* a lui $E$. Fiind date două mulţimi $E$, $E'$ şi $a \in E$, $a' \in E'$, se numeşte *operaţie externă* faţă de $E$, o operaţie care asociind pe $a$ şi $a'$ între ele, conduce la elemente ale mulţimii $E'$; prima mulţime $E$ primeşte numele de *mulţime de operatori*. Pentru operaţiile interne se foloseşte unul din simbolurile $\circ$, $*$, $\top$, $\perp$, ....

Cînd într-o mulţime $E$ s-au definit una sau mai multe operaţii de compoziţie, interne sau externe, se zice că pe $E$ s-a definit o *structură algebrică*.

**4. Grup.** O mulţime $G$ nevidă se zice că formează *grup* dacă şi numai dacă faţă de o operaţie internă $\circ$ satisface următoarele axiome:

a) Dacă $a,\ b \in G$, atunci şi $a \circ b \in G$.
b) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (asociativitatea).
c) $G$ conţine un *element neutru (element unitate)* astfel ca

$$u \circ a = a \circ u = a.$$

d) Oricare ar fi $a \in G$, avem în $G$ un element $a^{-1}$ numit *inversul* lui $a$, astfel ca

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = u.$$

O mulţime care satisface numai axiomelor a), b) se numeşte *semigrup*. Dacă avem în plus $a \circ b = b \circ a$, grupul se numeşte *comutativ* sau *abelian*.

Atunci cînd operaţia grupului este *adunarea* se zice că grupul este *aditiv* (elementul neutru se numeşte „zero“, iar $a^{-1}$ se notează cu $-a$), iar dacă operaţia este *înmulţirea*, grupul se numeşte *multiplicativ* (elementul neutru se notează cu „1“ iar inversul cu $1/a$). Un grup aditiv comutativ se numeşte *modul*.

*Proprietăţi.*

a) $u$ este unic.

b) $a^{-1}$ este unic.

c) ecuaţia $x \circ a = b$ are soluţia $x = b \circ a^{-1}$, iar ecuaţia $a \circ y = b$, are soluţia $y = a^{-1} \bullet b$ (care se confundă în cazul grupurilor comutative).

d) $(a^{-1})^{-1} = a$.

e) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

**5. Inel.** O mulţime $I$ se zice că formează *inel* dacă şi numai dacă posedă două operaţii numite *adunare* şi *înmulţire* reprezentate prin simbolurile $+$ şi $\cdot$ satisfăcînd axiomelor:

a) Faţă de operaţia adunării formează *modul* (§ 2.1.4) cu elementul neutru 0.

b) Faţă de operaţia înmulţirii formează semigrup (§ 2.1.4).

c) Cele două operaţii sînt legate între ele prin *axioma distributivităţii*

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \qquad c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Un inel se zice că este *comutativ* dacă operaţia înmulţirii este comutativă. Dacă inelul are element unitate faţă de înmulţire va avea şi elemente inverse faţă de această operaţie, fără ca proprietatea să fie generală (de ex., elementul 0 nu are invers).

*Proprietăţi.*

a) Adunarea are o operaţie inversă numită *scădere*.

b) Avem $a \cdot b = 0$, dacă $a = 0$ sau $b = 0$.

c) Invers, ecuaţia $a \cdot b = 0$ nu cere neapărat ca unul din factori să fie nul; elementele $a \neq 0$ care satisfac această ecuaţie se numesc *divizorii lui zero la stînga*, iar elementele $b \neq 0$ care verifică aceeaşi ecuaţie se numesc *divizorii lui zero la dreapta*. Nu orice inel are asemenea divizori; un inel comutativ cu element unitate faţă de înmulţire, dar fără divizori ai lui zero, se numeşte *domeniu de integritate* sau domeniu întreg.

**6. Corp.** O mulţime $C$ se zice că formează *corp* dacă şi numai dacă:

a) Este inel faţă de adunare şi înmulţire (§ 2.1.5).

b) Formează grup faţă de înmulţire (§ 2.1.4).

Un corp are cel puţin două elemente $u$ şi 0, diferite între ele. Un corp comutativ faţă de înmulţire se numeşte *corp comutativ* sau *cîmp*.

## Identităţi.

(54) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

(55) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

(56) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

(57) $a^3 \mp b^3 = (a \mp b)(a^2 \pm ab + b^2)$.

(58) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

(59) $a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a + b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \ldots - ab^{2m-1} + b^{2m})$.

(60) $a^{2m} - b^{2m} = (a^m - b^m)(a^m + b^m) = (a + b)(a^{2m-1} - a^{2m-2}b + \ldots + ab^{2m-2} - b^{2m-1})$.

(61) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

(62) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$.

(63) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$.

(64) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

Cîtul a două polinoame se numeşte *fracţie raţională*. În cazuri particulare, o fracţie raţională se reduce la un polinom. *Simplificarea* fracţiilor raţionale se face căutînd factorii comuni ai poli-

noamelor care formează *numărătorul* şi *numitorul* ei. Astfel, cîtul a două monoame este tot un monom, dacă monomul de la numărător conţine partea literară a celui de la numitor, factorii avînd exponenţii mai mari la numărător $\left(\text{de ex., } \frac{5a^5b^3c^4}{-3a^3bc^2} = -\frac{5}{3}a^2b^2c^2\right)$.

**2.** Obişnuit un polinom este ordonat după puterile descrescătoare (sau crescătoare) ale unei litere $x$ care intră în termenii ce-l compun şi se notează cu $P(x)$. Cea mai mare putere $n$ a lui $x$ se numeşte *gradul* polinomului ($n$ = gr. $P$). Monoamele ce-l compun se numesc *termenii* polinomului şi sînt cel mult în număr de $n + 1$; termenul ce nu-l conţine pe $x$ se numeşte *termen liber*. Un asemenea polinom se scrie obişnuit sub forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_px^{n-p} + \ldots + a_{n-1}x + a_n. \tag{65}$$

Suma a două (sau a unui număr finit) polinoame este tot un polinom $S(x)$ astfel că gr. lui $S$ este mai mic sau cel mult egal cu cel mai mare din gr. lui $P$ şi $Q$. Produsul $\Pi(x)$ a două (sau a unui număr finit) polinoame este tot un polinom, astfel ca gr. $\Pi(x)$ = gr. $P$ + gr. $Q$. Faţă

de operaţiile de adunare şi de înmulţire, mulţimea polinoamelor $P(x)$ formează *inel*.

**3.** Cîtul a două polinoame *nu* este în general un polinom. *Cîtul* şi *restul* împărţirii a două polinoame $P(x)$ (deîmpărţitul) şi $Q(x)$ (împărţitorul) sînt definite prin identitatea

$$\boxed{\begin{array}{c} P(x) = Q(x)C(x) + R(x), \\ \text{unde} \\ \text{gr } P \geqslant \text{gr} \cdot Q;\ \text{gr} \cdot C = \text{gr} \cdot P - \text{gr. } Q; \\ \text{gr. } R < \text{gr. } Q. \end{array}} \tag{66}$$

Dacă $Q(x) = x \pm a$, atunci $R = P(\pm a)$ şi împărţirea se face exact cînd $P(\pm a) = 0$. Identitatea (66) este unică. Algoritmul de calcul al lui $C(x)$ şi $R(x)$, cînd cunoaştem pe $P(x)$ şi Q(x) este acelaşi ca şi în aritmetică.

**4.** Se demonstrează că un polinom de gr. $n$ se poate scrie întotdeauna în mod unic, sub forma

$$\boxed{\begin{array}{c} P(x) = a_0(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \ldots \\ \ldots (x - x_p)^{m_p}, \\ m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n. \end{array}} \tag{67}$$

Binoamele $x - x_1$, $x - x_2$, ..., $x - x_p$ jucînd rolul factorilor primi din aritmetică ($x_1$, $x_2$, ..., $x_p$ sînt rădăcinile polinomului, diferite între ele). Fiind date două sau mai multe polinoame, prin **c.m.m.d.c.** al lor se înţelege polinomul $D(x)$ de

gr. cel mai mare care le divide în același timp pe toate. Calculul lui $D(x)$ se calculează prin metodele date la (§ 1.1.4). Analog se definește c.m.m.m.c a mai multor polinoame (§ 1.1.5).

**5.** Adunarea, înmulțirea și împărțirea fracțiilor raționale conduce tot la fracții raționale. Calculele cu fracțiile raționale se fac după aceleași metode cu cele întrebuințate în operațiile raționale în aritmetică (§ 1.2.2.3). Scriind identitatea (66) sub forma

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}} \tag{66'}$$

rezultă că o fracție rațională $P(x) / Q(x)$ pentru care gr. $P \geqslant$ gr. $Q$, se poate reduce întotdeauna la o fracție rațională $R(x) / Q(x)$, pentru care gr. $R <$ gr. $Q$.

**6.** Un polinom $P(x)$ scris sub forma (65), este *identic nul* (adică ia valoarea zero pentru orice $x$), dacă și numai dacă $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Dacă

$$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m, \tag{65'}$$

atunci polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ sînt identice între ele (adică iau aceleași valori oricare ar fi $x$), dacă și numai dacă $m = n$, $b_p = a_p$ ($p = 0, 1, \ldots, n$).

## §. 2.3. Analiza combinatorie Binomul lui Newton

**1.** Fiind date $n$ litere distincte în ordinea alfabetică, simbolizînd elementele unei mulțimi, cu ajutorul lor, luîndu-le cîte $p (p \leqslant n)$, se pot forma grupe care după natura lor se numesc:

a) *Aranjamente*, dacă grupele diferă între ele prin *ordinea* sau *natura* literelor care le compun. Numărul aranjamentelor este egal cu

$$(68) \quad \boxed{A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1).}$$

Tabelul $(TA_n^p)$ se formează din $(TA_n^{p-1})$ adăugîndu-i la urma fiecărei grupe toate literele neîntrebuințate în grupă. Se ține seamă că $(TA_n^1)$ este format din însăși literele date (vezi T. 6).

b) *Permutări*, dacă fiecare grupă conține toate literele, grupele diferind între ele prin *ordinea* literelor. Numărul permutărilor este egal cu

$$(69) \quad \boxed{P_n = n! = 1.2.3\ldots n;\ 0! = 1.}$$

Tabelul $(TP_n)$ se formează din $(TP_{n-1})$ plasînd o a $n$-a literă la începutul, sfîrșitul și între fiecare din primele $n-1$ litere cu care este scris acest tabel (vezi T. 6). Să presupunem că cele

litere sînt cifrele de la 1 la $n$. Două cifre $(p, q)$ se zice că prezintă o *inversiune* dacă $p > q$. Dacă numărul tuturor inversiunilor unei permutări este cu soţ, vom spune că permutarea este *pară* şi *impară* în caz contrar. Dacă într-o permutare se schimbă două cifre între ele, permutarea din pară devine impară şi invers. Numărul permutărilor pare este egal cu numărul permutărilor impare şi egal cu $\frac{1}{2} n!$.

c) *Combinări*, dacă fiecare grupă conţine $p$ $(p \leqslant n)$ litere, două grupe diferind între ele prin *natura* literelor care le conţin. Numărul combinărilor de $n$ obiecte luate cîte $p$, este egal cu

$$(90) \qquad \boxed{\begin{aligned} C_n^p = \binom{n}{p} &= \frac{n(n-1)..(n-p+1)}{p!} = \\ &= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^{n-p};\ C_n^0 = C_n^n = 1. \end{aligned}}$$

Tabelul combinărilor $(TC_n^p)$ se formează din aproape în aproape adăugînd la urma fiecărei combinări din $(TC_n^{p-1})$ literele nefolosite în ordinea alfabetică faţă de ultima literă. Tabelul $(TC_n^1)$ sînt însăşi literele date (vezi T. 6)

Avem formulele:

(91) $C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$.

(92) $C_n^{m+p} + C_p^1 C_n^{m+p-1} + C_p^2 C_n^{m+p-2} + \ldots + C_n^m = C_{n+p}^{m+p}$.

(93) $1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

(94) $1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

*T. 6*

| | |
|---|---|
| $TA_4^1$ | *a, b, c, d* |
| $TA_4^2$ | *ab, ac, ad; ba, bc, bd; ca, cb, cd; da, db, dc.* |
| $TA_4^3$ | *abc, abd; acb, acd; adb, adc; bac, bad; bca, bcd; bdc, bda; cab, cad; cba, cbd; cda, cdb; dab, dac; dba, dbc; dca, dcb.* |
| $TP_2$ | *ab, ba.* |
| $TP_3$ | *cab, acb, abc; cba, bca, bac.* |
| $TP_4$ | *dcab, cdab, cadb; cabd; dacb, adcb, acdb, acbd; dabc, adbc, abdc, abcd; dcba, cdba, cbda, cbad; dbca, bdca, bcda, bcad; dbac, bdac badc, bacd.* |
| $TC_4^1$ | *a, b, c, d.* |
| $TC_4^2$ | *ab, ac, ad; bc, bd; cd.* |
| $TC_4^3$ | *abc, abd; acd; bcd.* |

**2. Binomul lui Newton.** Dacă $n \in N$, atunci

(95)
$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + C_n^{n-1} x a^{n-1} + a^n = \sum_{p=1}^{n} C_n^p x^{n-p} a^p$$

Pentru $n = 2, 3$ avem formulele (§ 2.2. (54), (55)); pentru $3 < n \leqslant 10$, coeficienţii binomiali $C_n^p$ sînt trecuţi în (T. 7)

*T. 7*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | |
| $n = 5$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | |
| $n = 6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | |
| $n = 7$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | |
| $n = 8$ | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | |
| $n = 9$ | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | |
| $n = 10$ | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |

*Proprietăţi.*

a) Binomul lui Newton are $n + 1$ termeni.

b) În fiecare termen suma puterilor lui $x$ şi $a$ este egală cu $n$.

c) Coeficienţii egali depărtaţi de extremi din dezvoltare sînt egali; primul şi ultimul sînt egali cu unitatea.

d) Coeficientul unui termen se găseşte din precedentul înmulţindu-l cu puterea lui $x$ şi împărţindu-l cu puterea lui $a$ mărită cu o unitate (este vorba de puterile lui $x$ şi $a$ din termenul al cărui coeficient îl căutăm).

**3.** Binomul lui Newton se generalizează prin formula

$$(a + b + \ldots + l)^n = \sum \frac{n!}{p!q!\ldots s!} a^p b^q \ldots l^s. \tag{96}$$

însumarea din dreapta făcîndu-se luînd pentru $p, q, \ldots, s$ toate valorile întregi pozitive astfel ca $p + q + \ldots + s = n$. În particular, avem

$$(a + b + \ldots + l)^2 = \sum a^2 + 2 \sum ab, \tag{97}$$

$$(a + b + \ldots + l)^3 = \sum a^3 + 3 \sum a^2 b + 6 \sum abc, \tag{97'}$$

însumările făcîndu-se la toţi termenii de tipul indicat după $\sum$.

4. Sumele

$$S_p = 1^p + 2^p + \ldots + n^p \tag{98}$$

se calculează din aproape în aproape cu ajutorul relaţiei de recurenţă

$$\boxed{C_{p+1}^1 S_p + C_{p+1}^2 S_{p-1} + \ldots + C_{p+1}^p S_1 = (n+1)[(n+1)^p - 1].} \tag{99}$$

Se găsesc valorile

$$S_1 = \frac{1}{2} n(n+1),$$

$$S_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

(100)

$$S_3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2,$$

$$S_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

Cu ajutorul acestor sume, se pot calcula sume de forma $\sum_{p=1}^{n} P(p)$, unde $P(p)$ este un polinom în $p$ ($p \in N$), după metoda

$$\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2) = \sum_{p=1}^{n} (p^3 + 3p^2 + 2p) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} p^3 + 3 \sum_{p=1}^{n} p^2 + 2 \sum_{p=1}^{n} p = S_3 + 3S_2 + 2S_1 =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3).$$

**5. Progresii.**

a) Se numește *progresie aritmetică* un șir de numere (§ 7.1.2) în care un termen se deduce din precedentul adăugîndu-i un număr fix numit *rație*. O progresie aritmetică este cunoscută cînd îi cunoaștem primul termen $a$ și rația $r$; expresia ei este

$$\div a,\ a + r,\ a + 2r,\ a + 3r,\ \ldots$$

al $n$-lea termen avînd ca expresie

$$a_n = a + (n-1)r.$$

Într-o progresie aritmetică cu $n$ termeni, suma termenilor egal depărtați de extremi este con-

stantă. Suma tuturor termenilor unei asemenea progresii este egală cu

(101) $S_n = a + (a + r) + \ldots + [a + (n - 1)r] =$

$$= \frac{1}{2} n(a + a_n) = \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)r].$$

b Se numește *progresie geometrică* un șir de numere în care un termen se deduce din precedentul prin înmulțirea cu un număr fix numit *rație*. O progresie geometrică este cunoscută cînd îi cunoaștem primul termen $a$ și rația $q$; expresia ei este

$$\therefore a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$$

al $n$-lea termen avînd ca expresie

$$a_n = aq^{n-1}.$$

Dacă $q > 1$, termenii progresiei cresc, iar dacă $0 < q < 1$, descresc, suma a $n$ termeni dintr-o progresie geometrică este egală cu

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Dacă $|q| < 1$, atunci avem suma progresiei infinite

(102) $$S = a + aq + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1 - q}$$

(prima parte reprezintă $\lim_{n \to \infty} S_n$ cînd $n$ tinde către infinit § .7.3.1).

## § 2.4. Ecuații particulare

**1.** Se numește *ecuație algebrică* o ecuație de forma $P(x) = 0$, unde $P(x)$ este un polinom de gradul $n$. Se zice că $x_0$ este o *rădăcină* sau un *zero* al ecuației, dacă $P(x_0) = 0$; $x_0$ se numește o rădăcină de ord. $m$ a polinomului $P(x)$, sau a ecuației $P(x) = 0$, dacă:

$$P(x) = (x - x_0)^m P_1(x), \tag{103}$$

$P_1(x)$ fiind un polinom de gr. $(n-m)$. O ecuație algebrică de gr. $n$ are $n$ *rădăcini*. La (§ 7.7) se găsește teoria generală a ecuațiilor algebrice.

**2. Ecuații de gradul 1** sînt ecuațiile de tipul:

(104) $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ și au soluția unică $x_0 = -b/a$.

**3. Ecuații de gradul 2** sînt de tipul:

(105) $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ și au soluțiile

$$x_{1\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

(106) $ax^2 + 2b'x + c = 0$ $(a \neq 0)$ are soluțiile

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a},$$

(107) $x^2 + 2b'x + c = 0$ are soluţiile

$$x_{1,2} = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c}.$$

Expresia $R = b^2 - 4ac$ se numeşte *realizantul* sau *discriminantul* ecuaţiei (105). Dacă $x_1$ corespunde semnului +, iar $x_2$ semnului —, în soluţii, avem discuţia:

*T. 8.*

| $R = b^2 - 4ac$ | $S = x_1 + x_2 = -b/a$ | $P = x_1 x_2 = c/a$ | Natura rădăcinilor |
|---|---|---|---|
| — | | | $x_1$, $x_2$ complexe conjugate |
| + | + | + | $x_1$, $x_2$ reale pozitive |
| + | — | + | $x_1$, $x_2$ reale, ambele negative |
| + | + | — | $x_1$, $x_2$ reale, de semne contrare, cea pozitivă mai mare în valoare absolută ca cea negativă |
| + | — | — | $x_1$, $x_2$ reale, de semne contrare, cea negativă mai mare în valoare absolută ca cea pozitivă |
| 0 | ± | ± | o rădăcină dublă reală, $x_1 = x_2$. |

**4. Ecuaţii bipătrate** sînt ecuaţiile de forma

$$\boxed{\begin{array}{l} ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ şi au soluţiile} \\ x_{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \pm \sqrt{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \end{array}} \tag{108}$$

A se vedea şi § 3.4.4

**5. Ecuaţii reciproce** sînt ecuaţiile în care coeficienţii egal depărtaţi de extremi sînt egali ($a_r = a_{n-r}$). Dacă ecuaţia este de grad impar, ea admite rădăcina $x = -1$ şi împărţind ecuaţia cu $x + 1$, ne rămîne o ecuaţie reciprocă de grad cu soţ. Dacă o ecuaţie reciprocă admite rădăcina $a$ admite şi rădăcina $1/a$. Pentru a rezolva o asemenea ecuaţie de grad cu soţ se face substituţia

$$x + 1/x = y, \tag{109}$$

care ridicată succesiv la puterile 2, 3, ..., ne spune că $x^p + 1/x^p = A(y)$ (polinom în $y$). Se împarte ecuaţia cu $x^{n/2}$ şi ţinînd seamă de rezultatul precedent, ecuaţia se reduce la o ecuaţie algebrică $B(y) = 0$ de gr. $\frac{1}{2}n$. La fiecare rădăcină a acestei ecuaţii, rezultă din (109) două rădăcini ale ecuaţiei iniţiale. De ex., pentru ecuaţia de gr. 4, avem

(110)
$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0;$$
$$a_0(x^2 + 1/x^2) + a_1(x + 1/x) + a_2 = 0;$$
$$x^2 + 1/x^2 = y^2 - 2; \quad a_0y^2 + a_1y +$$
$$+ (a_2 - 2a_0) = 0 \text{ cu rădăcinile } y_1, y_2;$$
$$x^2 - y_1x + 1 = 0; \; x^2 - y_2x + 1 = 0 \text{ etc.}$$

**6. Sisteme de ecuații.** Fiind date două ecuații cu două necunoscute $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$, respectiv de gr. $m$ și $n$, a rezolva sistemul format de ele, înseamnă a găsi perechile de numere $(x, y)$ care să le verifice simultan. Pentru calcul, se *elimină* una din necunoscute scoțîndu-i valoarea dintr-una din ecuații. De ex., scoțînd pe $y = R(x)$ din a doua și înlocuindu-l în prima, se obține o ecuație numai în $x$, $S(x) = 0$. Rezolvînd această ecuație, găsim rădăcinile $x_k$, cu ajutorul cărora se formează perechile $[x_k, y_k = R(x_k)]$ care vor fi soluțiile sistemului dat. Sistemul admite în general maximum $mn$ soluții reale sau complexe. Metoda se aplică fără nici o dificultate dacă una din ecuațiile date este de gr. 1 într-una din necunoscute. Uneori este bine ca înainte de a începe calculul, să se înlocuiască ecuațiile date prin combinații care pot conduce la ecuații mai simple decît cele inițiale.

**7.** Fiind date două ecuații algebrice $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ ($P$ și $Q$ două polinoame) se numește *eliminantul* lor $\Delta$, rezultatul eliminării lui $x$ între

cele două ecuații. Condiția ca cele două ecuații să aibă o rădăcină comună este $\Delta = 0$. Astfel, eliminantul ecuațiilor

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

este

$$\Delta = (a'c - ac')^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c).$$

## § 2.5 Inegalități

**1.** În urma definiției (§ 1.1.1), pe lîngă inegalitățile (17), (18), (19), (19′) avem de asemenea:

(111) Dacă $0 < a \leqslant b$, atunci $a^p \leqslant b^p (p \in R^+)$, $\sqrt[q]{a} \leqslant \sqrt[q]{b}$ $(q \in N)$.

(112) $|a + b + \ldots + l| \leqslant |a| + |b| + \ldots + |l|$,

(113) Dacă $a < b$ și $a, b, m, n > 0$, atunci $a < \dfrac{ma + nb}{m + n} < b$.

(114) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

(115) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$.

(116) $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $(a_h > 0)$.

(117) $(1+a)(1+b)\ldots(1+l) > 1+(a+b+\ldots+l)$, $(a \geqslant 0, \ldots, l \geqslant 0)$.

(118) $1-a^n < n(1-a)$ dacă $0<a<1$ şi

(18′) $a^n - 1 > n(a-1)$ dacă $a>1$.

(119) $(1-a)^n > 1 - na + \frac{1}{2}n(n-1)a^2 - \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$, $(3 < n \in N, 0<a<1)$.

(120) $n^{n+1} > (n+1)^n$, $(3 < n \in N)$.

(121) $\sqrt{n^n} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

(122) $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2) \geqslant (a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_n\alpha_n)^2$.

(123) Dacă $0<a<1$, $a^x > a^y$, cînd $x<y$, iar

(123′) dacă $a>1$, $a^x < a^y$ cînd $x<y$ (§ 7.2)

(124) Dacă $0<a<1$, $\log_a x > \log_a y$, cînd $x<y$, iar

(124′) dacă $a>1$, $\log_a x < \log_a y$ cînd $x<y$ (§ 7.2).

**2.** $\mathbf{E = ax + b}$, dacă $x_0 = -b/a$, atunci $E$ are acelaşi semn cu $a$, dacă $x>x_0$ şi semn contrar, dacă $x<x_0$.

**3.** $T = ax^2 + bx + c$. Dacă $b^2 - 4ac > 0$, ecuația are două rădăcini reale și $T$ va avea același semn cu $a$, dacă $x$ este în afara rădăcinilor, și semn contrar cu $a$, cînd $x$ este între rădăcini; cînd $x$ este una din rădăcini, $T = 0$. Dacă $b^2 - 4ac \leqslant 0$, $T$ are același semn cu $a$, oricare ar fi $x$; cînd $b^2 - 4ac = 0$, $T = 0$, cînd $x$ este egal cu unica rădăcină (dublă) a ecuației.

**4.** Pentru a studia semnul unui polinom $P(x)$, îl descompunem în factori primi reali (§ 7.7 (343)) și suprimăm dintre ei pe cei care provin din rădăcini complexe, iar dintre cei care provin din rădăcini reale, păstrăm numai pe cei care sînt la puteri impare; polinomul rămas $P_1(x)$ are același semn cu $P(x)$. Se așază rădăcinile acestuia în ordinea mărimii și se caută semnul în intervalul $(-\infty, x_1)$, $x_1$ fiind cea mai mică rădăcină reală. În intervalele următoare, $P(x)$ va avea semne alternate (de ex., pentru semnul polinomului $P(x) = -2x^3(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^5(x^2 + x + 1)^3$, vom considera polinomul $P_1(x) = -x(x-2)(x-3)$ care este pozitiv în intervalele $(-\infty, 0)$, $(2, 3)$ și negativ în intervalele $(0, 2)$, $(3, +\infty)$.

*Observație.* În considerațiile de mai sus, coeficienții polinoamelor considerate precum și $x$, sînt presupuși numere reale.

## § 2.6. Determinanți

1. Un determinant de ord. $n$ este un tablou pătratic cu $n$ *linii* și $n$ *coloane* căruia i se atribuie valoarea

(125)

$$D = |a_h^k| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & & a_n^n \end{vmatrix} = \sum (-1)^r a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n};$$

suma din dreapta are $n!$ termeni care se obțin luînd pentru $(k_1 k_2 \dots k_n)$ o permutare a primelor $n$ numere, iar $r$ reprezintă numărul de inversiuni ale acesteia (§ 2.3.1 b). Determinantul are $n^2$ *elemente* $a_h^k$; acest element este la intersecția liniei $h$ cu coloana $k$; elementele care se găsesc pe linia care unește pe $a_1^1$ cu $a_n^n$ se zice că formează *diagonala principală*. Suprimînd din determinant linia $h$ și coloana $k$ ne rămîne un determinant de ord. $(n-1)$, care se numește *minorul lui* $D$ *relativ la elementul* $a_h^k$ și se notează cu $D_h^k$; $A_h^k = (-1)^{h+k} D_h^k$ se numește *cofactorul elementului* $a_h^k$ din $D$. Avem

$$(126)\qquad \sum_{h=1}^{n} a_h^k A_h^k = \sum_{k=1}^{n} a_h^k A_h^k = D,$$

$$(127)\qquad \sum_{h=1}^{n} a_h^l A_h^m = \sum_{k=1}^{n} a_l^k A_m^k = 0 \ (l \neq m).$$

În particular

$$(128)\qquad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b,$$

(129)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - (cb'a'' - c'b''a - c''ba') \text{ (regula lui } Sarrus).$$

**2.** *Proprietăți.*

a) Un determinant este nul dacă: toate elementele unei linii sau coloane sînt nule; elementele corespunzătoare a două linii (sau coloane) sînt egale sau proporționale; elementele unei linii (sau coloane) se exprimă liniar cu ajutorul a $p$ linii (respectiv coloane), adică

$$a_h^k = \lambda_1 a_{h_1}^k + \lambda_2 a_{h_2}^k + \ldots + \lambda_p a_{h_p}^k \quad \text{sau}$$

(130)

$$a_h^k = \mu_1 a_h^{k_1} + \mu_2 a_h^{k_2} + \ldots + \mu_p a_h^{k_p}.$$

b) Valoarea unui determinant nu se schimbă cînd se fac următoarele operaţii: se schimbă liniile în coloane şi coloanele în linii, fără a schimba ordinea lor; se adună la elementele unei linii (sau coloane) alte linii (sau coloane) înmulţite cu cîte un factor ales după voie.

c) Un determinant îşi schimbă semnul dacă schimbăm între ele două linii (sau coloane).

d) Dacă elementele unei linii (sau coloane) au un factor comun, acesta se scoate factor comun în faţa determinantului.

e) Dacă elementele unei linii (sau coloane) sînt sume de $p$ termeni, determinantul se descompune într-o sumă de $p$ determinanţi după regula

$$(131)\quad \begin{vmatrix} a_1^1 \dots \sum_{i=1}^{p} b_1^i \dots a_1^n \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 \dots \sum_{i=1}^{p} b_n^i \dots a_n^n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{p} \begin{vmatrix} a_1^1 \dots b_1^i \dots a_1^n \\ \dots\dots\dots \\ a_n^1 \dots b_n^i \dots a_n^n \end{vmatrix}$$

**3. Produsul** a doi determinanţi $D_1 = |a_h^k|$, $D_2 = |b_h^k|$ este tot un determinant $D_1 D_2 = |c_h^k|$ ale cărui elemente se calculează după regula

$$(132)\quad c_h^k = a_1^k b_h^1 + a_2^k b_h^2 + \dots + a_n^k b_h^n.$$

**4. Determinanţi particulari.**

a) Determinanţi *triunghiulari* care au toate elementele de deasupra sau dedesubtul diagonalei principale nule (adică $a_h^k = 0$, cînd $h < k$); valoarea lor este egală cu produsul elementelor de pe diagonală.

b) Determinanţi *diagonali* care au toate elementele de deasupra şi dedesubtul diagonalei principale nule (adică $a_h^k = 0$ cînd $h \neq k$); valoarea lor este egală cu produsul elementelor de pe diagonală.

c) Determinanţi *simetrici* ale căror elemente satisfac relaţia $a_h^k = a_k^h$.

d) Determinanţi *antisimetrici* ale căror elemente satisfac relaţia $a_h^k = -a_k^h$ $(a_h^h = 0)$. Un determinant antisimetric de ordin impar are valoarea zero; un determinnt antisimetric de ordin par se poate scrie sub forma unui pătrat perfect dintr-un polinom format cu elementele sale.

e) Determinanţi *Vandermonde*, care sînt de forma

(133)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & b & \dots & k & l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & \dots & k^{n-1} & l^{n-1} \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\dots(l-a)\cdot (c-b)\dots(l-b)\cdot \dots\dots\dots \cdot (l-k)$$

f) Determinanți *circulari* care sînt de forma (134)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{vmatrix} = \varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_n),$$

unde $\alpha_i$ sînt rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$ (§ 3.4.3 c), iar

$$\varphi(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}.$$

g) Determinantul $\Delta$ format cu cofactorii lui $D \neq 0$ (§ 2.6.1), se numește *reciprocul* lui $D$ și are valoarea $\Delta = D^{n-1}$.

## § 2.7. Matrice

**1.** O matrice este un tablou de forma*)

$$A = [a_h^k] = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{bmatrix}, \tag{135}$$

pentru care vom folosi aceleași numiri ca la determinanți. Matricea considerată se zice că este

*) Se mai folosește simbolul $\| a_h^k \|$ sau $( a_h^k )$.

*dreptunghiulară* și are ordinul $m \times n$, unde $m$ este numărul *liniilor* iar $n$ numărul *coloanelor*. Dacă $m = n$, matricea se numește *pătratică de ord. n*. Elementele matricei sînt numere reale (se pot considera matrice cu elemente numere complexe sau mai general elementele unui cîmp oarecare). Cu *elementele* unei matrice pătrate se poate forma un determinant $D = |a_h^k|$ numit *determinantul matricei*. Dacă $D \neq 0$, matricea se zice că este *nesingulară* și *singulară* dacă $D = 0$. Dacă $r$ este ordinul cel mai mare al determinanților ce se pot construi cu elementele matricei $A$, diferiți de zero, se zice că matricea este de *rangul r* (§ 2.7.4 n).

Se numește *transpusa* matricei $A = [a_h^k]$, matricea $A' = [a_h^k]$ și are ordinul $n \times m$. Două matrice transpuse au același rang.

**2. Matrice particulare.**

a) *Matricea nulă* care are toate elementele nule; o matrice nulă poate avea orice ordin: $O = [0]$.

b) Matricele $1 \times n$ care au o singură linie se numesc *matrice linie*.

c) Matricele $m \times 1$ care au o singură coloană se numesc *matrice coloană*; matricele coloană sînt transpusele matricelor linie și invers.

d) *Matricele pătrate* pot fi *triunghiulare* ($a_h^k = 0$ cînd $h < k$) sau *diagonale* ($a_h^k = 0$ cînd $h \neq k$).

e) *Matrice unitate* $I_n = I$ ($n$ fiind ordinul) pentru care $a_h^k = \delta_h^k$ ($\delta_h^k$ este *simbolul lui Kronecker* care are valoarea 1 cînd $h = k$ şi 0 cînd $h \neq k$).

f) *Simetrice* ($a_h^k = a_k^h$ sau $A = A'$) sau *antisimetrice* ($a_h^k = -a_k^h$ sau $A = -A'$).

**3. Operaţii cu matrice.**

a) Două matrice $A = [a_h^k]$, $B = [b_h^k]$ de *acelaşi ordin* sînt egale dacă şi numai dacă $a_h^k = b_h^k$.

b) Suma a două matrice $A = [a_h^k]$, $B = [b_h^k]$ de acelaşi ordin este o matrice de acelaşi ordin $A + B = [a_h^k + b_h^k]$.

c) Produsul unei matrice $A = [a_h^k]$ cu un număr $m$ este o matrice de acelaşi ordin $mA = [ma_h^k]$ (de ex., $-A = [-a_h^k]$).

d) Produsul unei matrice $A = [a_h^k]$ de ord. $m \times n$ cu o matrice $B = [b_k^l]$ de ord. $n \times p$, este matricea $AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_h^k b_k^l\right]$ de ord. $m \times p$; produsul a două matrice se defineşte, numai atunci, cînd ordinele sînt de forma indicată şi în general nu este comutativ. Două matrice pătrate, de acelaşi ordin, pot fi întotdeauna înmulţite între ele.

e) Dacă $A = [a_h^k]$ este o matrice pătratică nesingulară se numește *matrice inversă*, matricea $A^{-1} = [A_h^k/|a_h^k|]$, unde $A_h^k$ este cofactorul elementului $a_h^k$ în determinantul $|a_h^k|$ (§ 2.6.1). Avem

(136) $$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

**4. Proprietăți.**

a) $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

b) $m(nA) = n(mA) = (mn)A$.

c) $m(AB) = (mA)B = A(mB)$.

d) $m(A + B) = mA + mB$, $(m + n)A = mA + nA$.

e) Înmulțirea a două matrice nu se poate efectua decît dacă prima are același număr de coloane cu numărul liniilor celei de-a doua (§ 2.7.3 d). Dacă ord. $A = m \times n$, ord. $B = n \times p$, ord. $C = p \times q$, atunci $A(BC) = (AB)C$ și reprezintă o matrice de ord. $m \times q$.

f) $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.

g) Dacă $A$, $B$ sînt două matrice pătrate de același ordin, atunci $|AB| = |A| \cdot |B|$ unde $|A|$ este determinantul matricei $A$; această proprietate spune că produsul a două matrice

pătrate nesingulare este o matrice nesingulară.

h) $A + 0 = A$, $A + (-A) = 0$, $0A = B\,0 = 0$.

i) $AI = IA = A$.

j) $(A + B)' = A' + B'$, $(mA)' = mA'$, $(AB)' = B'A'$, $(A)')' = A$.

k) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(mA)^{-1} = m^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

l) Puterile unei matrice pătrate se definesc prin egalitățile

$$AA = A^2,\ A^2A = A^3,\ \ldots,\ A^nA = A^{n+1},\ \ldots$$

și se bucură de proprietățile § 1.4.2.

m) Matricele formează un inel care admite divizori ai lui zero (§ 2.1.5).

n) *Teorema lui Kronecker*: dacă cu liniile și coloanele unei matrice $A$ putem forma un determinant $d \neq 0$ de ord. $r$ și dacă toți determinanții de ord. $(r + 1)$ ce se pot forma în același mod sînt nuli, atunci rangul matricei este $r$. Deci, pentru a determina rangul unei matrice, se consideră un determinant de ord. 2, $D_2 \neq 0$; apoi cu el formăm un determinant de ord. 3, $D_3 \neq 0$, ș.a.m.d. pînă la un $D_r \neq 0$, cînd toți determinanții de ord. $(r + 1)$ sînt nuli.

## § 2.8. Sisteme de ecuații liniare

**1.** Un sistem de ecuații liniare este de forma

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_h^k x_k = b_h \quad (h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)} \tag{137}$$

conține $m$ ecuații cu $n$ *necunoscute* $x_k$. *Coeficienții necunoscutelor* $a_h^k$ și *termenii liberi* $b_h$ sînt considerați numere reale sau complexe. Sistemul se poate scrie sub forma

$$\boxed{AX = B,} \tag{137'}$$

unde $A = |a_h^k|$, $X = [x_k]$, $B = [b_h]$, ultimele două fiind matrice coloană. Se numește *soluție* un sistem de valori $x_k = x_k^0$, care *verifică* sistemul dat. Dacă sistemul admite cel puțin o soluție se zice că este *compatibil* și *incompatibil* în caz contrar. Dacă admite o *singură* soluție se zice că este *compatibil determinat* și *compatibil nedeterminat* cînd admite mai multe soluții.

**2. Regula lui Cramer.** Dacă $m = n$ și $D = |a_h^k| \neq 0$, sistemul se numește *normal* și este compatibil determinat. Soluția sistemului este

$$x_k = D_k / D, \tag{138}$$

unde $D_k$ este determinantul ce se obține din $D$ înlocuind coloana $k$ cu matricea $B$. Soluția se poate scrie și sub forma matriceală

$$X = A^{-1}B. \tag{138'}$$

Făcînd produsul matriceal din partea dreaptă (§ 2.7.3 d), rezultă o matrice coloană ale cărei elemente sînt valorile necunoscutelor.

**3. Teorema lui Kronecker-Capelli.** Se consideră pe lîngă matricea $A$, matricea $A_1$ care se obține din $A$ mărginind-o la dreapta cu coloana $B$. *Sistemul (137) este compatibil dacă și numai dacă matricele $A$ și $A_1$ au același rang $r$.* Calculul soluțiilor se face prin metoda următoare:

a) Se determină determinantul $D_r$, care dă rangul sistemului (§ 2.7.4 p), numit *determinant principal;* necunoscutele și ecuațiile ale căror coeficienți intră în $D_r$ se numesc *principale*, iar celelalte *secundare*.

b) Dacă $n = r$, sistemul este compatibil determinat și soluția se obține rezolvînd prin regula lui Cramer sistemul ai cărui coeficienți intră în $D_r$.

c) Dacă $r < n$, ca și la cazul precedent se rezolvă același sistem după ce în prealabil s-au trecut în dreapta necunoscutele secundare. Soluția sistemului depinde de valorile acestor $n - r$ necunoscute, care pot lua valori arbitrare. Vom spune că sistemul are $\infty^{n-r}$ soluții.

*Observație.* Se numește *determinant caracteristic* un determinant de ord. $(r + 1)$ obținut din $D_r$, mărginindu-l cu o linie formată din coeficienții necunoscutelor principale dintr-o ecuație secundară și cu o coloană formată cu termenii liberi ai ecuațiilor folosite. Teorema de mai sus exprimă că sistemul considerat este compatibil, dacă și numai dacă *toți* determinanții caracteristici sînt nuli.

**4. Sisteme omogene** se numesc sistemele pentru care $B = 0$ $(b_h = 0,\ 1 \leqslant h \leqslant m)$. Un asemenea sistem admite întotdeauna soluția banală $x_h = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Dacă $m = n$ și dacă $D = 0$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat admițînd soluțiile

$$(139)\quad \frac{x_1}{A_h^1} = \frac{x_2}{A_h^2} = \ldots = \frac{x_n}{A_h^n} = u;\ x_k = uA_h^k,$$

unde $u$ este un parametru arbitrar, $A_h^k$ cofactorii lui $D$ (§ 2.6.1), presupunînd că cel puțin unul este diferit de zero, iar $h$ o linie oarecare a lui $D$.

Aceeași soluție admite un sistem omogen cu $n$ necunoscute și $(n - 1)$ ecuații, a cărui matrice este de rangul $(n - 1)$.

# 3. TRIGONOMETRIE

## § 3.1. Funcții trigonometrice directe și inverse

**1. Cerc trigonometric** este cercul care are următoarele proprietăți (fig. 8):

a) Orice lungime din planul său este măsurată cu raza luată ca unitate de măsură; pentru acest motiv, se zice că are raza egală cu 1.

b) Este împărțit în patru cadrane de două diametre perpendiculare $AA'$, $BB'$ considerate ca axe de coordonate.

c) Este orientat, fiind considerat ca descris de un mobil care pleacă din originea $A$*) și merge în sens invers acelor unui ceasornic, sens considerat pozitiv; sensul opus este considerat negativ.

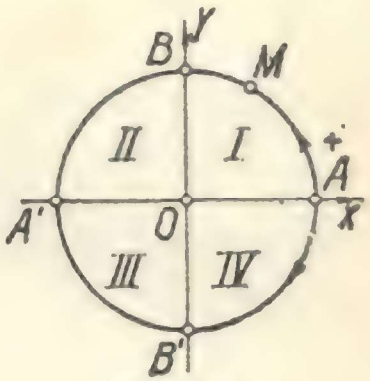


Fig. 8

*) Orice arc de pe cercul trigonometric este considerat ca având originea în $A$.

Dacă exprimăm arcul $\widehat{AM} = n^\circ$ în grade (§ 4.2.1), punctul $M$ este considerat, mai general, ca fiind extremitatea arcelor $n^\circ + 360^\circ \cdot k$ $(k \in Z)$ toate cu originea în $A$. Același arc exprimat în unități de lungime $\widehat{AM} = n^r$ se zice că este exprimat în *radiani*, iar punctul $M$ este considerat ca extremitatea arcelor $n^r + 2k\pi$ $(k \in Z)$ având ca origine pe $A$. Avem relația

$$180^\circ n^r = \pi n^\circ.$$

În particular, arcul de $1^r$ (a cărui măsură este egală cu raza) satisface dublei inegalități $58^\circ 10' < 1^r < 58^\circ 20'$.

Extremitățile celor patru cadrane au valorile trecute în T. 9.

T. 9

| Arcul \ extremitatea | $A$ | $B$ | $A'$ | $B'$ |
|---|---|---|---|---|
| În grade | $0^\circ$ sau $360^\circ k$ | $90^\circ$ sau $90^\circ(4k+1)$ | $180^\circ$ sau $180^\circ(2k+1$ | $270^\circ$ sau $90^\circ(4k+3)$ |
| În radiani | $0$ sau $2k\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ sau $\frac{1}{2}(4k+1)\pi$ | $\pi$ sau $(2k+1)\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ sau $\frac{1}{2}(4k+3)\pi$ |

**2. Funcţiile*) trigonometrice directe** ale unui arc oarecare $x$ (fig. 9) au valorile (exprimate cu raza cercului), $x = \widehat{AOM} = \widehat{AM}$:

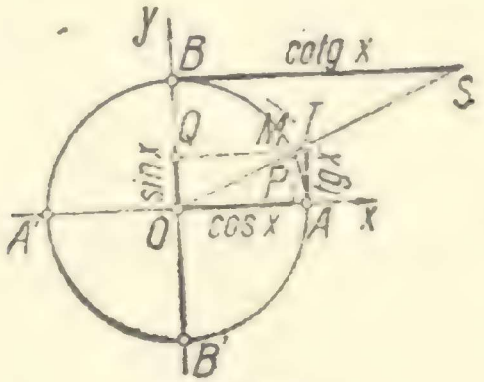



Fig. 9

(140)
$$\boxed{\begin{aligned} \overline{OQ} &= \sin x, \\ \overline{OP} &= \cos x, \\ \overline{AT} &= \operatorname{tg} x, \\ \overline{BS} &= \operatorname{cotg} x, \\ \overline{OT} &= \sec x, \\ \overline{OS} &= \operatorname{cosec} x. \end{aligned}}$$

Variaţiile primelor patru funcţii sînt trecute în tabelele şi graficele ce urmează:

*) Pentru noţiunea de funcţie a se vedea § 7.1.1.

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}\pi$ | | $\pi$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty/-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ |
| $\operatorname{cotg} x$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty/+\infty$ | |

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{3}{2}\pi$ | | $\pi$ |
| $-1$ | $\nearrow$ | 0 |
| 0 | $\nearrow$ | 1 |
| $+\infty/-\infty$ | $\nearrow$ | 0 |
| 0 | $\searrow$ | $-\infty$ |

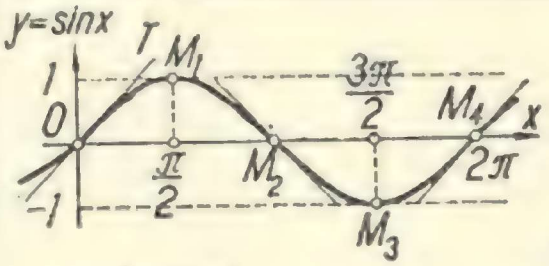



Fig. 10

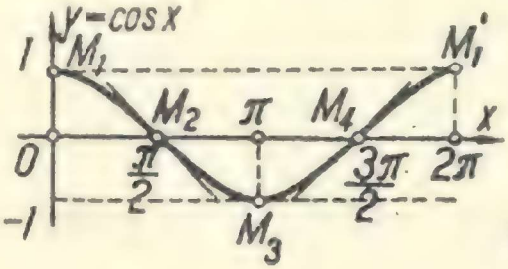



Fig 11

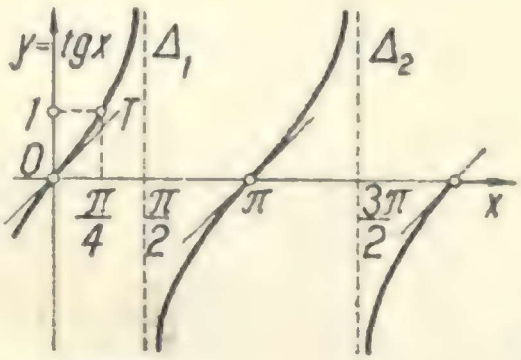



Fig 12

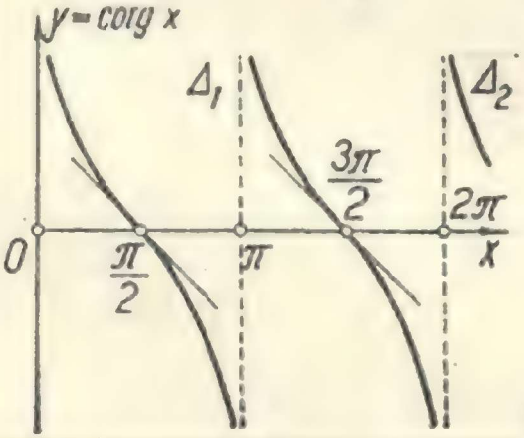



Fig. 13

| $x$ în grade | $0°$ sau $360°$ | $15°$ | $18°$ | $22°30'$ | $30°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ în rad. | $0$ sau $2\pi$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{10}$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| $\sin x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $0$ | $2-\sqrt{3}$ | $\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{80}$ | $\sqrt{2}-1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $\pm\infty$ | $2+\sqrt{3}$ | $\frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ | $\sqrt{2}+1$ | $\sqrt{3}$ |

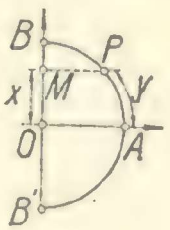
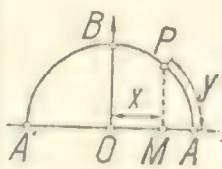
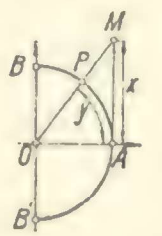
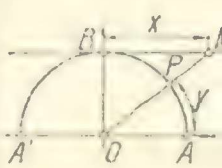
Funcțiile $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ studiate poartă același nume și sînt definite pe R.

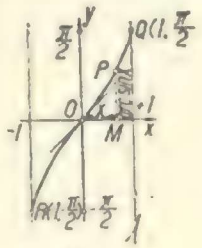
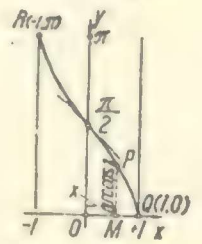
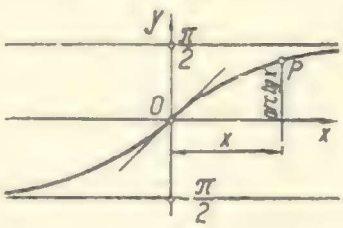
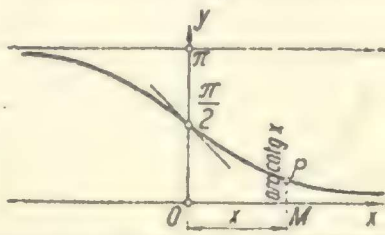
*T. 11.*

| 45° | 54° | 60° | 75° | 90° | 180° | 270° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{10}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ | 1 | 0 | $-1$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ | 0 | $-1$ | 0 |
| 1 | $\frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{80}$ | $\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ |
| 1 | $\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $2-\sqrt{3}$ | 0 | $\pm\infty$ | 0 |

mai sus sînt restricţiile (§ 7.1.3) funcţiilor care

## 4. Funcţiile trigonometrice inverse

| Funcţia | Definiţia | Intervalul de definiţie | Figura |
|---|---|---|---|
| $y = \arcsin x$ | $\sin y = x$ | $-\frac{1}{2}\pi \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\pi$ |   |
| $y = \arccos x$ | $\cos y = x$ | $0 \leqslant y \leqslant \pi$ |   |
| $y = \operatorname{arctg} x$ | $\operatorname{tg} y = x$ | $-\frac{1}{2}\pi \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\pi$ |   |
| $y = \operatorname{arccotg} x$ | $\operatorname{cotg} y = x$ | $0 \leqslant y \leqslant \pi$ |   |

| Relații | Tabelul de variație | Figura |
|---|---|---|
| $\sin(\arcsin\ x) = x$<br>$\arcsin(\sin\ x) = x$ | $x$: $-1$ $\quad 0$ $\quad +1$<br>$y$: $-\frac{1}{2}\pi$ ↗ $0$ ↗ $\frac{1}{2}\pi$ |  |
| $\cos(\arccos\ x) = x$<br>$\arccos(\cos\ x) = x$ | $x$: $-1$ $\quad 0$ $\quad +1$<br>$y$: $\pi$ ↘ $\frac{1}{2}\pi$ ↘ $0$ |  |
| $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\ x) = x$<br>$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\ x) = x$ | $x$: $-\infty$ $\quad 0$ $\quad +\infty$<br>$y$: $-\frac{1}{2}\pi$ ↗ $0$ ↗ $\frac{1}{2}\pi$ |  |
| $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}\ x) = x$<br>$\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}\ x) = x$ | $x$: $-\infty$ $\quad 0$ $\quad +\infty$<br>$y$: $\pi$ ↘ $\frac{1}{2}\pi$ ↘ $0$ |  |

## § 3.2. Formule și ecuații trigonometrice

**1. Relații între funcțiile trigonometrice ale arcelor din diferite cadrane ale cercului trigonometric**

*T. 13.*

| $y =$ | $-x$ | $90° \pm x$ | $180° \pm x$ | $270° \pm x$ | $360° \pm x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin y =$ | $-\sin x$ | $\cos x$ | $\mp\sin x$ | $-\cos x$ | $\pm\sin x$ |
| $\cos y =$ | $\cos x$ | $\mp\sin x$ | $-\cos x$ | $\pm\sin x$ | $\cos x$ |
| $\operatorname{tg} y =$ | $-\operatorname{tg} x$ | $\mp\operatorname{cotg} x$ | $\pm\operatorname{tg} x$ | $\mp\operatorname{cotg} x$ | $\pm\operatorname{tg} x$ |
| $\operatorname{cotg} y =$ | $-\operatorname{cotg} x$ | $\mp\operatorname{tg} x$ | $\pm\operatorname{cotg} x$ | $\mp\operatorname{tg} x$ | $\pm\operatorname{cotg} x$ |

**2. Formule fundamentale**

(141) $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(142) $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}.$$

(143) $$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

(144) $$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

(145) $$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

$$(146)\quad \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}.$$

$$(147)\quad \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{cotg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}.$$

$$(148)\quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}.$$

$$(149)\quad \operatorname{cotg} x = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

**3. Formule de adunare a arcelor şi consecinţe ale lor.**

$$(150)\quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.$$

$$(151)\quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

(152) $$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

(153) $$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y}.$$

(154) $$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y).$$

(155) $$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y).$$

(156) $$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y).$$

(157) $$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x \pm y) \cos \frac{1}{2}(x \mp y).$$

(158) $$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y).$$

(159) $$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{1}{2}(y - x) \sin \frac{1}{2}(y + x).$$

(160) $$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$$

(161) $$\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}.$$

**4. Formule care exprimă funcțiile trigonometrice ale multiplilor arcelor și consecințe ale lor.**

(162) $$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

(163) $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$$
$$= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

(164) $$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

(165) $$\operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\operatorname{cotg} x}.$$

(166) $$\sin \frac{1}{2} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos x)}.$$

$$\cos \frac{1}{2} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)}.$$

(167) $$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

(168) $$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

(169) $$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

(170) $$\operatorname{cotg} 3x = \frac{\operatorname{cotg}^3 x - 3\operatorname{cotg} x}{3\operatorname{cotg}^2 x - 1}.$$

(171)

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots .$$

(172) $$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \dots .$$

(173) $$\operatorname{tg} nx = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} x - C_n^3 \operatorname{tg}^3 x + \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 x + \dots}.$$

(174)

$$\operatorname{cotg} nx = \frac{\operatorname{cotg}^n x - C_n^2 \operatorname{cotg}^{n-2} x + \dots}{C_n^1 \operatorname{cotg}^{n-1} x - C_n^3 \operatorname{cotg}^{n-3} x + \dots}.$$

(175)

$$\sin^{2p} x = \frac{(-1)^p}{2^{p-1}} [\cos 2px - C_{2p}^1 \cos 2(p-1)x + C_{2p}^2 \cos 2(p-2)x - \dots \dots + (-1)^{p-1} C_{2p}^{p-1} \cos 2x] + \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p.$$

(175′)

$$\sin^{2p+1}x = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}[\sin(2p+1)x - C_{2p+1}^1 \sin(2p-$$

$$-1)x + C_{2p+1}^2 \sin(2p-3)x - \ldots +$$

$$+ (-1)^p C_{2p+1}^p \sin x].$$

(176)

$$\cos^{2p}x = \frac{1}{2^{2p-1}}[\cos 2px + C_{2p}^1 \cos 2(p-1)x +$$

$$+ C_{2p}^2 \cos 2(p-2)x + \ldots + C_{2p}^{p-1} \cos 2x] +$$

$$+ \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p.$$

(176′)

$$\cos^{2p+1} x = \frac{1}{2^{2p}}[\cos(2p+1)x + C_{2p+1}^1 \cos(2p-$$

$$-1)x + C_{2p+1}^2 \cos(2p-3)x + \ldots + C_{2p+1}^p \cos x].$$

În formulele (171)—(176′) simbolul $C_n^m$ reprezintă numărul combinărilor de $n$ obiecte luate cîte $m$ (§ 2.3.(90)).

Avem de asemenea formulele

(177)

$$\sin a + \sin(a + h) + \ldots + \sin[a + (n - 1)h] = \frac{\sin \frac{1}{2} nh \sin\left[a + \frac{1}{2}(n - 1)h\right]}{\sin \frac{1}{2} h}.$$

(178)

$$\cos a + \cos(a + h) + \ldots + \cos[a + (n - 1)h] = \frac{\sin \frac{1}{2} nh \cos\left[a + \frac{1}{2}(n - 1)h\right]}{\sin \frac{1}{2} h}.$$

**5. Relații între funcțiile trigonometrice inverse.**

(179) $$\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi.$$

(180) $$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi.$$

(181) $$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1 - y^2} \pm y\sqrt{1 - x^2}\right).$$

(182) $\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x \pm y}{1 \mp xy}$.

## 6. Ecuații trigonometrice simple.

*T. 14.*

| Ecuația | Soluția |
|---|---|
| a) $\sin x = a (\lvert a \rvert \leqslant 1)$ | $\begin{cases} x = 2k\pi + \arcsin a \\ x = (2k+1)\pi - \arcsin a \end{cases}$ sau $x = k\pi + (-1)^k \arcsin a$ |
| b) $\cos x = a (\lvert a \rvert \leqslant 1)$ | $x = 2k\pi \pm \arccos a$ |
| c) $\operatorname{tg} x = a$ | $x = k\pi + \operatorname{arctg} a$ |
| d) $\operatorname{cotg} x = a$ | $x = k\pi + \operatorname{arccotg} a$ |

*Observație.* Cînd cunoaștem pe $a$, atunci $\arcsin a, \ldots, \operatorname{arccotg} a$ se calculează cu ajutorul unei tabele de linii trigonometrice naturale (sau cu logaritmi) așa cum s-a explicat la § 7.2.2 folosind metoda interpolării. Se va ține seamă în calcule că $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ sînt crescătoare, în timp ce $\cos x$ și $\operatorname{cotg} x$ sînt descrescătoare în primul cadran al cercului trigonometric.

**7.** a) Ecuația

(183) $a \sin x + b \cos x = c \qquad (a, b, c \in R)$

prin substituția $b = a \operatorname{tg} \alpha$ se reduce la ecuația

(183′) $$\sin(x + \alpha) = (c/a) \cos \alpha,$$

care este de tipul a) din T. 14. Pentru a avea soluții este necesar ca $|c \cos \alpha| \leqslant |a|$.

b) Ecuații de forma

(184) $$\sum_{h=0}^{n} a_h \sin^h x \cos^{n-h} x = 0$$

(omogene în sin $x$ și cos $x$), se reduc la ecuații algebrice prin substituția $\operatorname{tg} x = u$.

## § 3.3. Rezolvarea triunghiurilor

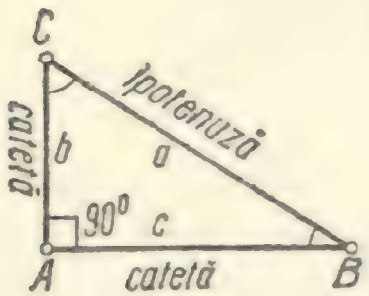


Fig. 22

**1. Triunghiuri dreptunghice** (§ 4.4.6 I). *Notații* (fig. 22): laturile se numesc $a = BC$ *ipotenuză* (opusă unghiului drept $A = 90°$); $b = CA$, $c = AB$ *catete*.

*Formule*:

(185) $B + C = 90°$.

(186) $b = a \sin B = a \cos C$; $c = a \sin C = a \cos B$.

(187) $b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{cotg} C$; $c = b \operatorname{tg} C = b \operatorname{cotg} B$.

(188) $$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} = (a + c)/b.$$

| Cazul | Date | Necunoscute | Formule folosite | Condiții |
|---|---|---|---|---|
| I | $a, B$ | $b, c, C$ | $b = a \sin B$<br>$c = a \cos B$<br>$C = 90° - B$ | $B < 90°$ |
| II | $a, b$ | $c, B, C$ | $c = \sqrt{(a-b)(a+b)}$<br>$\sin B = b/a$<br>$C = 90° - B$ | $a > b$ |
| III | $b, C$ | $a, c, B$ | $a = b/\cos C$<br>$c = b \operatorname{tg} C$<br>$B = 90° - C$ | $C < 90°$ |
| IV | $b, c$ | $a, B, C$ | $a = \sqrt{b^2 + c^2}$<br>$\operatorname{tg} B = b/c$<br>$C = 90° - B$ | nu sînt |

**2. Triunghiuri oarecare** (§ 4.4.1). *Notații* (fig. 23): laturile $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; perimetrul $2p = a + b + c$; raza cercului circumscris $OA = OB = OC = R$; raza cercului înscris $IE = IF = IK = r$; razele cercurilor exîn-

scrise $I_aE' = I_aF' = I_aK' = r_a$, $r_b$, $r_c$; înălțimile $AD = h_a$, $h_b$, $h_c$; aria $S$; medianele $AA' = m_a$, $m_b$, $m_c$; bisectoarele interioare $AJ = l_a$,

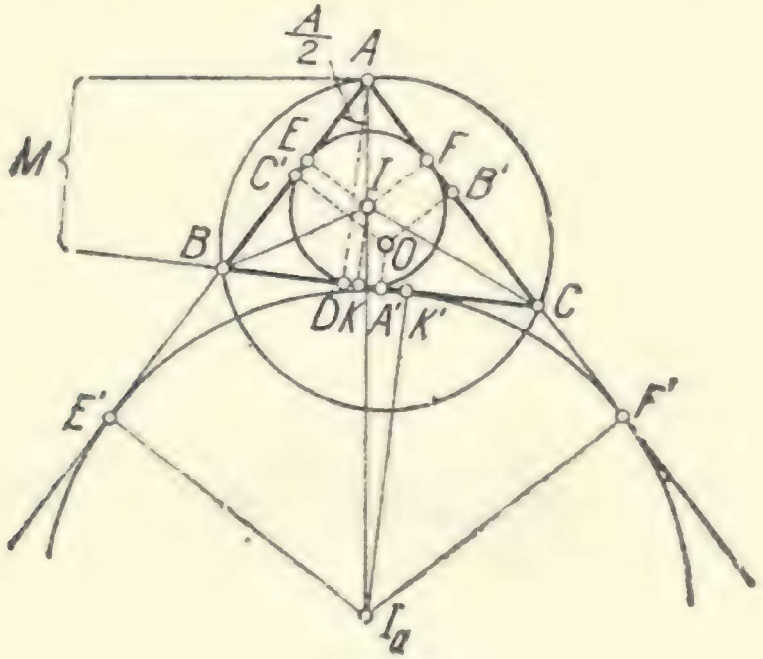



Fig. 23

$l_b$, $l_c$; bisectoarele exterioare $AM = l'_a$, $l'_b$, $l'_c$.

*Formule*:

(189) $A + B + C = 180°$.

(190) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

(191) $a = b \cos C + c \cos B$, ...

(192) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, ...

(193) $$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2},\ \ldots$$

(194) $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \ldots$$

(195) $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\ \ldots$$

(196) $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a),}},\ \ldots$$

(197) $$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=$$

$$=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{S}{p}=$$

$$=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

(198) $$r=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=$$

$$=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{S}{p-a}=$$

$$=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},\ \ldots$$

(199) $$p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

(200) $$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

(201) $$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} = \frac{2R \sin B \sin C}{\cos \frac{1}{2}(B-C)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}, \ \ldots$$

(202) $$l_a = \frac{2bc}{b-c} \sin \frac{A}{2} = \frac{2R \sin B \sin C}{\sin \frac{1}{2}(B-C)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}{b-c}, \ \ldots$$

(203) $$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}, \ \ldots$$

(204) $$S = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(205) $$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

*Cazuri de rezolvare*

| Cazul | Date | Necunoscute | Formule folosite | Condiții |
|---|---|---|---|---|
| I | $a, B, C$ | $A$, $b$, $c$, $S$ | $A = 180° - (B + C)$<br>$b = \dfrac{a \sin B}{\sin(B + C)}$<br>$c = \dfrac{a \sin C}{\sin(B + C)}$<br>$S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B + C)}$ | $B + C < 180°$ |
| II | $b, c, A$ | $a$, $B$, $C$, $S$ | $B + C = 180° - A$<br>$\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(B-C) = \dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2}$<br>$a = b \sin A / \sin B$<br>$S = \dfrac{1}{2} b\, c \sin A$ | nu sînt |

| Cazul | Date | Necunoscute | Formule folosite | Condiții |
|---|---|---|---|---|
| III | $a, b, c$ | $A, B, C, S$ | $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ și analog pentru calculul lui $B$, $C$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ | $a < b + c$ și a logele ei |
| IV | $a, b, A$ | $c, B, C, S$ | $\sin B = b \sin A / a$ $C = 180° - (A + B)$ $c = a \sin C / \sin A$ | 1) $b \sin A < a$; relație dă două $B$ și $180° - B$. a) $A < 90°$ aven soluții cînd $b >$ singură soluție $b \leqslant a$. b) $A > 90°$ avem luție dacă $b <$ c) $A = 90°$ sîn cazul II de la ghiurile dreptu 2) $b \sin A = a$ $= 90°$ avem o cînd $b > a$. |

**3. Formule referitoare la proiecţii.**

a) Proiecţia unui vector pe o axă $\Delta$ este un segment orientat a cărui mărime este dată de formula (fig. 24)

(206) $$\boxed{\overline{A'B'} = |\overline{AB}| \cos\varphi.}$$

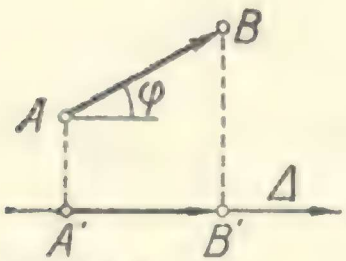



Fig. 24

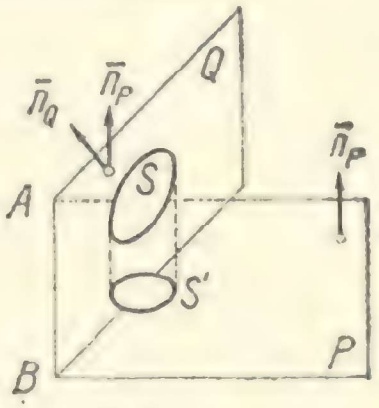



Fig. 25

b) Proiecţia unei arii plane orientată prin versorul normal planului $\bar{n}_Q$ (§ 6.1.1), pe un plan orientat prin versorul normal $\bar{n}_P$ este dat de formula (fig. 25)

(207) $$\boxed{\bar{S}' = |\bar{S}| \cos(\bar{n}_Q, \bar{n}_P).}$$

## § 3.4. Numere complexe

1. Prin definiţie un număr complex $c$ este o pereche ordonată de numere $(a, b)$ $(a, b \in R)$; adunarea şi înmulţirea a două numere complexe

$c_1 \longleftrightarrow (a_1, b_1)$, $c_2 \longleftrightarrow (a_2, b_2)$ se definesc prin $c_1 + c_2 \longleftrightarrow (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, $c_1 c_2 \longleftrightarrow (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Un număr complex de forma $(a, 0)$ reprezintă numărul real $a$. Dacă se definește *unitatea imaginară* $i \longleftrightarrow (0, 1)$, atunci $i^2 = -1$ și orice număr complex se va putea scrie sub forma $c = a + bi$. Un număr complex de forma $bi$ se numește *pur imaginar*. Două numere complexe de tipul $c = a + bi$, $\bar{c} = a - bi$ se numesc *complexe conjugate*. Dacă reprezentăm în plan numărul complex $c$ prin coordonatele $(a, b)$ (fig. 26), $\bar{c}$ va fi simetricul lui față de $Ox$ (§ 5.5.1). Vom introduce notațiile $a = \overline{OA} = \mathrm{Re}(c)$, $b = \overline{OB} = \mathrm{Im}(c)$, $OC = \rho =$ modulul lui $c = |c|$, $\widehat{AOC} = \theta =$ argumentul lui $c = \arg c$. $-c$ opusul lui $c$. Avem

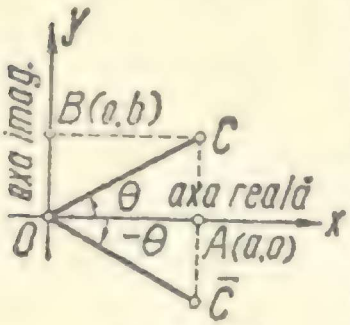


Fig. 26

$$(208)\quad a = \rho\cos\theta;\quad b = \rho\sin\theta;\quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\theta = 2k\pi + \begin{cases} \mathrm{arctg}(b/a) & \text{dacă } \mathrm{Re}(c) > 0 \\ \frac{1}{2}\pi & \text{dacă } \mathrm{Re}(c) = 0,\ \mathrm{Im}(c) > 0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{dacă } \mathrm{Re}(c) = 0,\ \mathrm{Im}(c) < 0, \\ \pi + \mathrm{arctg}(b/a) & \text{dacă } \mathrm{Re}(c) < 0, \end{cases}$$

unde $k \in Z$. Avem

(209) $$\boxed{c = a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).}$$

Prima expresie se numește *forma algebrică* iar a doua, *forma trigonometrică* a numărului complex.

**2. Proprietăți.**

a) Dacă punem $c_h = a_h + ib_h = \rho_h(\cos\theta_h + i\sin\theta_h)$, atunci:

(210) $c = 0$ dacă și numai dacă $\mathrm{Re}(c) = \mathrm{Im}(c) = 0$ sau $|c| = 0$.

(211) $c_1 = c_2$ dacă și numai dacă $\mathrm{Re}(c_1) = \mathrm{Re}(c_2)$ și $\mathrm{Im}(c_1) = \mathrm{Im}(c_2)$.
sau
$|c_1| = |c_2|$ și $\arg c_1 = \arg c_2 + 2k\pi (k \in Z)$.

(212) $$\mathrm{Re}(c) = \frac{1}{2}(c + \bar{c}), \quad \mathrm{Im}(c) = \frac{1}{2i}(c - \bar{c}).$$

(213) $$|\bar{c}| = |c|, \quad \arg c = -\arg \bar{c}.$$

(214) $$c_1 \pm c_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2).$$

(215) $$c_1c_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

(216) $$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

(217) $$\overline{c_1 + c_2} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2.$$

(218) $\overline{c_1 c_2} = \bar{c}_1 \bar{c}_2$.

(219) $\overline{(c_1/c_2)} = \bar{c}_1/\bar{c}_2 \ (c_2 \neq 0)$; $\bar{\bar{c}} = c$.

(219′) $c + \bar{c} = 2a$ (real), $c\bar{c} = a^2 + b^2$ (real)

(220) $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$; $i^{4m} = 1$,
$i^{4m+1} = i$, $i^{4m+2} = -1$, $i^{4m+3} = -i$ $(m \in N)$.

(221) $c^m = \rho^m(\cos m\theta + i \sin m\theta)$. $(m \in Z)$

b) Geometric (fig. 27), numărul complex $c_1 + c_2$ este al patrulea vîrf $S$ al paralelogramului construit pe $OM_1 = |c_1|$, $OM_2 = |c_2|$ ca laturi; de asemenea $c_1 - c_2$ este al patrulea vîrf al paralelogramului construit pe $OM_1$ și $OM_2'$ ca laturi ($-c_2$ este simetricul lui $c_2$ față de $O$). Avem

(222) $|c_1 + c_2| = OS$, $|c_1 - c_2| = OD = M_2M_1$.

c) Geometric, suma mai multor numere complexe (fig. 28) se face din aproape în aproape.

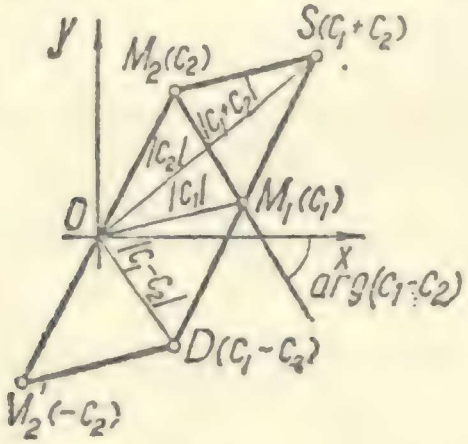



Fig. 27

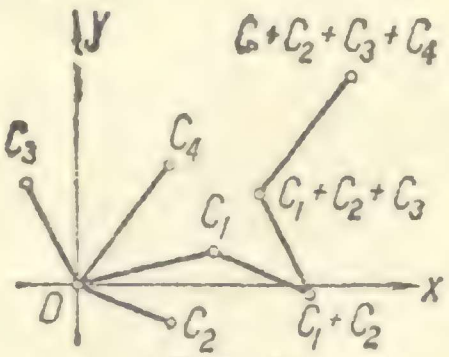



Fig. 28

Pentru aceasta se consideră vectorii care unesc originea cu fiecare punct $c_k$ și se așază acești vectori cap la cap astfel ca extremitatea fiecăruia să coincidă cu originea următorului; ultima extremitate va reprezenta suma căutată.

d) Formulele (216)—(218) date la § 1.2.4 valabile pentru valorile absolute ale numerelor reale, sînt valabile și pentru modulele numerelor complexe.

e) *Formula lui Moivre*

$$(223)\qquad \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta \quad (m \in Z).}$$

f) Mulțimea numerelor complexe $C$ formează un corp comutativ (cîmp) față de operațiile de adunare și înmulțire definite la § 3.4.1.

3. a) Rădăcina pătrată dintr-un număr complex are două valori egale și opuse. Dacă numărul complex este scris sub forma algebrică, atunci

$$(a+bi)^{\frac{1}{2}} = \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]$$

unde $\varepsilon$ este semnul lui b.

b) *Rădăcina de ord. n dintr-un număr complex* are $n$ valori; dacă numărul este scris sub formă trigonometrică, atunci

(224) $$c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1;\ n \in N).$$

Din (221) şi (224) rezultă

$$|c^p| = |c|^p \qquad (p \in Q).$$

În reprezentarea plană numerele complexe (224) se găsesc pe un cerc cu centrul în origine de rază $\sqrt[n]{\rho}$ (rădăcina aritmetică a lui $\rho$, § 1.4) formînd vîrfurile poligonului regulat cu $n$ laturi înscris; primul vîrf are argumentul $\theta/n$ (fig. 29).

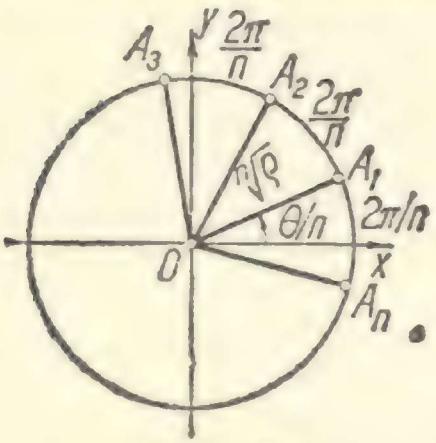


Fig. 29

c) În particular rădăcinile de ord. $n$ ale unităţii sînt

$$1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}, \text{ unde}$$
$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

d) O *ecuaţie binomă* este o ecuaţie de forma

(225) $x^n - c = 0,\ (n \in N),$

unde $c$ este un număr complex. O asemenea ecuaţie are $n$ rădăcini date de formula (223). Cu ajutorul ecuaţiilor binome, prin metoda dată la § 2.4.4, se pot rezolva ecuaţii de forma

(226) $ax^{2n} + bx^n + c = 0.$

# 4. GEOMETRIA EUCLIDIANĂ A PLANULUI

## § 4.1. Unghiuri. Drepte paralele

**1. Punct. Dreaptă.** Figura geometrică care nu are nici o dimensiune se numește *punct*. Un punct definește o *poziție* pe o dreaptă, într-un plan sau în spațiu. Linia dreaptă, sau mai simplu, *dreapta*, este figura geometrică reprezentată printr-un fir întins care nu are grosime. Printr-un punct trec o infinitate de drepte care se zice că formează un *fascicul* (fig. 30). O *dreaptă orientată* este o dreaptă pe care s-a ales un sens de parcurgere. Un punct pe o dreaptă, o împarte în două *semidrepte* $AB$, $AB'$ (fig. 31). Două drepte care se întîlnesc în plan se taie într-un punct.
Prin două puncte trece o dreaptă și numai una. Porțiunea dintr-o dreaptă mărginită de două puncte $A$, $B$ se

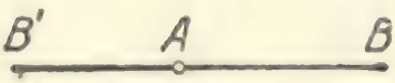


Fig. 31

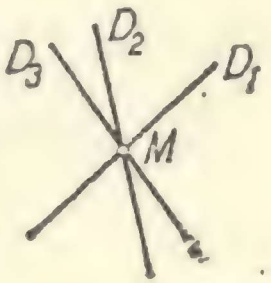


Fig. 30

numește *segment*, iar $A$, $B$ *extremitățile* segmentului (fig. 32). Un segment are o *lungime*. Dacă segmentul este orientat (segment algebric) de la $A$ spre $B$, $A$ se numește *originea* iar $B$ *extremitatea* segmentului și se notează cu $\overline{AB}$. Două segmente *egale* (care se pot suprapune) au aceeași lungime.

Fig. 32

**2.** Două semidrepte $D_1$, $D_2$ care se întîlnesc într-un punct $O$, definesc un *unghi* $\widehat{AOB} = (\widehat{D_1, D_2})$ (fig. 33); $O$ se numește *vîrful* unghiului, iar $D_1$, $D_2$ *laturile* lui. Un unghi care are laturile confundate se numește *unghi nul*. Două unghiuri care într-un mod oarecare sînt aduse să se suprapună (în sensul ca să aibă același vîrf și laturile confundate) se zice că sînt *egale*. Dacă din vîrful unghiului ca centru descriem un arc de cerc, măsura acestui arc în grade sau în radiani (§ 3.1.1) este independentă de raza cercului. Acest *invariant* se numește *măsura* unghiului. Două unghiuri egale au aceeași măsură.

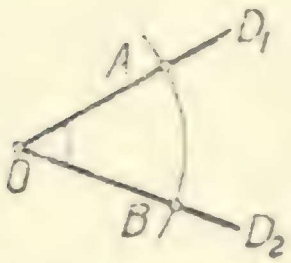


Fig. 33

**3. Noțiunea de unghi geometric** dată mai sus, se poate extinde la noțiunea de *unghi algebric* (adică *orientat*) considerînd laturile unghiului într-o ordine determinată. Vom avea relațiile;

(227) $\widehat{(D_1, D_2)} = -\widehat{(D_2, D_1)}$ sau mai general

$$\widehat{(D_1, D_2)} = -\widehat{(D_2, D_1)} + 360°k.$$

(228) $\widehat{(D_1, D_2)} + \widehat{(D_2, D_3)} + \ldots + \widehat{(D_{n-1}, D_n)} +$

$$+ \widehat{(D_n, D_1)} = 360°k \quad (k \in Z),$$

$D_k$ fiind semidrepte ce pleacă din același punct (fig. 34). Dacă dreptele se succed în ordinea naturală a indicilor și unghiurile sînt definite prin valoarea geometrică, atunci trebuie să luăm în (228), $k = 1$.

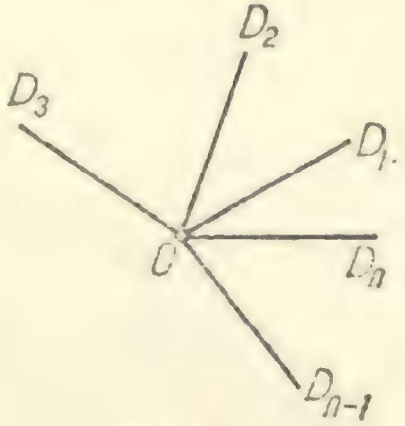


Fig. 34

**4.** Un unghi de 90° $\left(\text{în radiani } \frac{\pi}{2}\right)$ se numește *unghi drept* și laturile se zic că sînt *perpendiculare* (fig. 35). Orice punct $M$ de pe una din laturi se zice că se proiectează în $O$ pe cealaltă latură, sau că $O$ este proiecția lui $M$ pe $OA$. Două unghiuri $\widehat{AOC}$, $\widehat{COB}$ a căror sumă este 90° se numesc *complementare*. Un unghi de 180° are laturile în prelungire

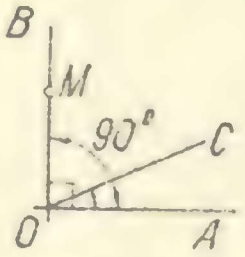


Fig. 35

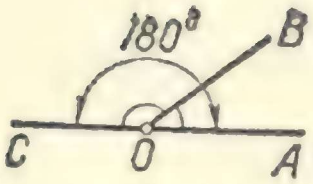



Fig. 36

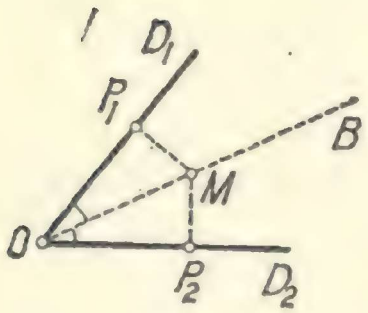



Fig. 37

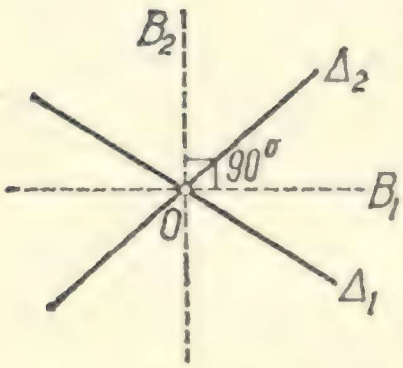



Fig. 38

(fig. 36); două unghiuri $\widehat{AOB}$, $\widehat{COB}$ care au ca sumă 180° se numesc *suplementare*; invers, două unghiuri suplementare care au același vîrf, o latură comună, situate de-o parte și de cealaltă a acesteia (unghiuri *adiacente*) au celelalte două laturi în prelungire.

**5.** Semidreapta $OB$ care împarte un unghi în două părți egale (fig. 37) se numește *bisectoare*. Orice punct de pe bisectoare este egal depărtat de laturi. Două drepte $\Delta_1$, $\Delta_2$ care se taie în $O$ (fig. 38) formează patru unghiuri opuse la vîrf două cîte două egale între ele. Bisectoarele unghiurilor opuse la vîrf sînt în prelungire iar bisectoarele unghiurilor suplementare, perpendiculare între ele. Pentru unghiul $\widehat{\Delta_1 O \Delta_2}$, $OB_1$ este *bisectoare interioară*, iar $OB_2$, *bisectoare exterioară*.

**6.** Două drepte *coplanare* $\Delta_1$, $\Delta_2$ (care sînt în același plan) sînt *paralele* dacă nu au nici un

punct comun la distanță finită (fig. 39). Două drepte sînt paralele dacă și numai dacă formează cu o *secantă* arbitrară Δ, unghiuri *alterne interne* egale (de ex., $\alpha = \beta$). Toate unghiurile ascuțite (respectiv obtuze) formate de secantă sînt egale; două unghiuri din categorii diferite sînt suplementare. Dacă secanta este perpendiculară pe una din drepte este perpendiculară și pe cealaltă și formează cu ele unghiuri drepte.

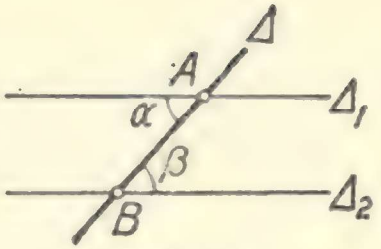


Fig. 39

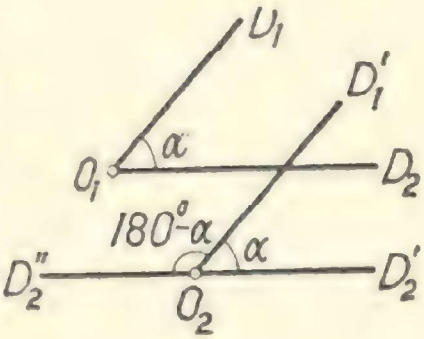


Fig. 40

Două unghiuri care au laturile paralele (fig. 40), sau perpendiculare (fig. 41), sînt egale sau suplementare după cum ambele laturi sau numai două din ele au același sens (sau sensuri opuse).

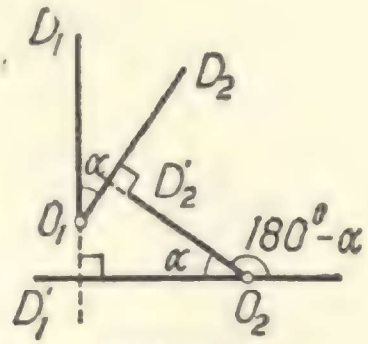


Fig. 41

Printr-o convenție de exprimare, putem spune că două drepte paralele fac între ele un unghi de 0° sau 180°.

**7.** Mai multe drepte sînt paralele (fig. 42) dacă și numai dacă, determină pe două secante arbitrare segmente proporționale

$$(229)\quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \dots$$

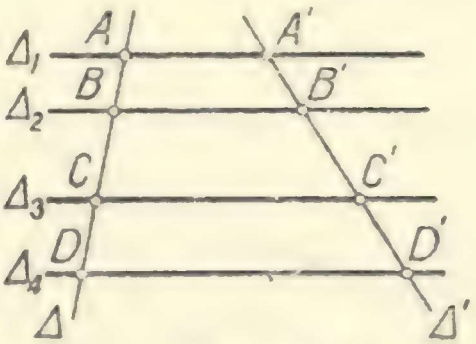



Fig. 42

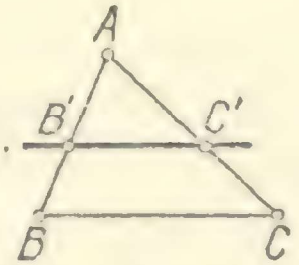



Fig. 43

În particular (fig. 43), o dreaptă $B'C'$ este paralelă cu $BC$ dacă și numai dacă

$$(229')\quad \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$$ (teorema lui *Thales*).

*Consecință.* $B'C'$ este paralelă cu $BC$ atunci și numai atunci cînd

$$(230)\qquad \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

## § 4.2. Cercul

**1. Cercul** este o curbă formată de toate punctele din plan egal depărtate de un punct fix $O$ numit *centru* cu distanța $R$ numită *rază*. Dacă alegem un sens de parcurgere, de ex., cel trigonometric (§ 3.1.1), vom spune că cercul este *orientat*. Figura cea mai simplă construită pe cerc este *arcul* care este o porțiune de cerc mărginită de două puncte $M$, $N$ *extremitățile* arcului (fig. 44)

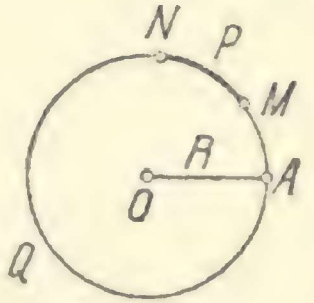


Fig. 44

notat cu $\overset{\frown}{MN}$. În fond două puncte $M$, $N$ pe un cerc, determină două arce $\overset{\frown}{MPN}$ și $\overset{\frown}{MQN}$ a căror sumă este un cerc; cînd se pot produce confuzii, va trebui să precizăm de care din arce vorbim. Măsura unui arc se face în *grade* (sau în *radiani*, loc. cit.). Un *grad* 1°, este a 360-a parte dintr-un cerc, un *minut* 1′ este a șaizecea parte dintr-un grad, iar o *secundă* 1″ este a șaizecea parte dintr-un minut. Acest sistem se numește *sexazecimal;* dacă se ia pentru grad a 400-a parte din cerc, pentru minut a 100-a parte dintr-un grad, iar pentru secundă a 100-a parte dintr-un minut, sistemul se numește *centesimal.*

Dacă se iau pe un cerc orientat $n$ puncte $A_k$ aşezate într-o ordine oarecare, atunci

$$(231)\quad \overset{\frown}{A_1A_2} + \overset{\frown}{A_2A_3} + \ldots + \overset{\frown}{A_{n-1}A_n} + \overset{\frown}{A_nA_1} = 360^\circ k \qquad (k \in Z).$$

Dacă luăm pentru arce mărimea geometrică, atunci $k = 1$.

**2.** Considerăm acum cercul în plan.

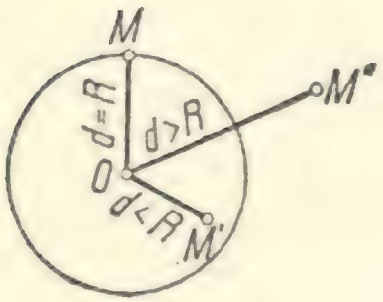


Fig. 45

Punctele din plan se împart în trei categorii faţă de cerc (fig. 45) după cum ($OM = d$) $d < R$, puncte *interioare*, $d > R$ puncte *exterioare* sau $d = R$ puncte pe *cerc*; pentru acest motiv, se zice că cercul este o *curbă plană închisă*.

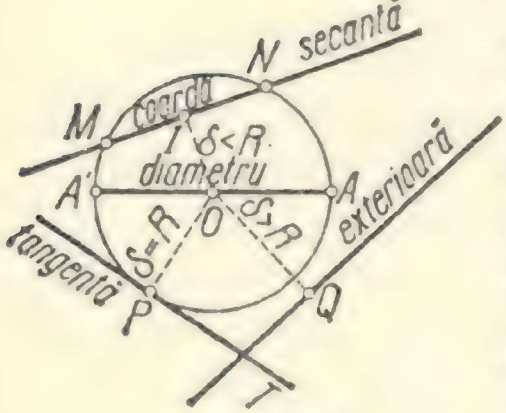


Fig. 46

Dreptele din plan se împart, faţă de cerc, de asemenea în trei categorii (fig. 46) (δ distanţa de la 0 la dreaptă): $\delta < R$ *secantă*, porţiunea $MN \leqslant 2R$ se numeşte *coardă*, care în cazul în care secanta trece prin $O$, $MN = AA' = 2R$ şi se

numește *diametru*; $\delta > R$, *exterioară*); $\delta = R$, *tangentă* (§ 7.6.2). Din punct de vedere algebric, spunem că o secantă taie cercul în *două puncte reale*, o dreaptă exterioară în *două puncte imaginare conjugate*, iar o tangentă în *două puncte reale confundate*.

Dintr-un punct exterior $M$ (fig. 47) se pot duce la un cerc două tangente egale $MP = MQ$; dreapta $OM$ care unește pe $M$ cu centrul cercului împarte unghiul tangentelor în două părți egale și este perpendiculară pe $PQ$, dreapta ce unește punctele de tangență.

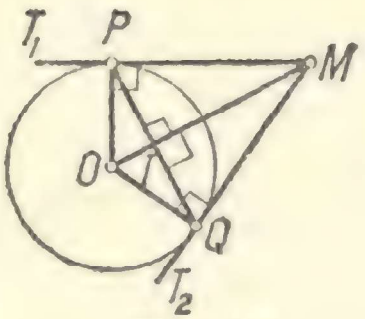


Fig. 47

Un diametru este *axă de simetrie* (§ 5.5.1) pentru cerc.

**3. Măsura unghiurilor în cerc** (fig. 48).

a) *Unghi la centru*, unghiul care are vîrful în centrul cercului, $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$.

b) *Unghi înscris*, adică unghiul care are vîrful pe cerc, $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$.

c) *Unghi format de o coardă și tangenta într-o extremitate*

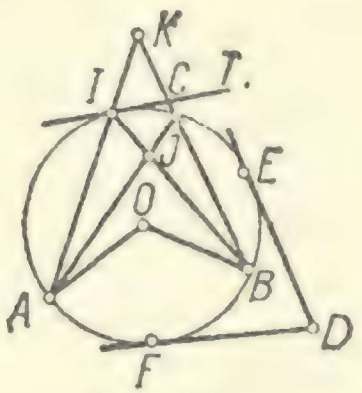


Fig. 48

(caz limită al precedentului), $\widehat{AIT} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABI}$.

d) *Unghi interior*, unghiul care are vîrful în interior, $\widehat{AJB} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{IC})$.

e) *Unghi exterior*, unghiul care are vîrful în exterior, $\widehat{AKB} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{IC})$.

f) *Unghi cu vîrful în exterior și avînd laturile tangente la cerc* (caz limită al precedentului), $\widehat{EDF} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{EAF} - \overset{\frown}{EBF})$.*

**4.** Două cercuri sînt egale cînd au razele egale. Într-un cerc, sau în două cercuri egale, avem proprietăţile (fig. 49):

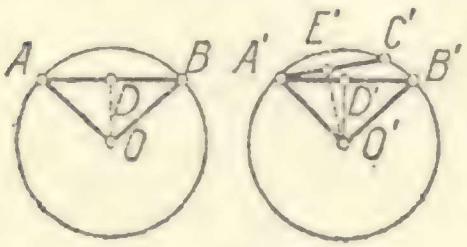


Fig. 49

a) Egalităţile $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$, $AB = A'B'$, $OD = O'D'$, $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$ sînt echivalente.

*) Egalităţile din acest paragraf exprimă faptul că unghiurile şi arcele care le compun, au aceeaşi măsură.

b) Inegalitățile $\widehat{AB} > \widehat{A'C'}$, $AB > A'C'$, $\widehat{AOB} > \widehat{A'O'C'}$ sînt echivalente.

c) $AB > A'C'$ dacă și numai dacă $OD < O'E'$.

**5. Pozițiile relative a două cercuri.**

a) *Secante* (fig. 50) cînd se taie în două puncte. Distanța centrelor $OO' = d$ este față de raze, $R - R' < d < R + R'$ $(R' < R)$. Punctele de

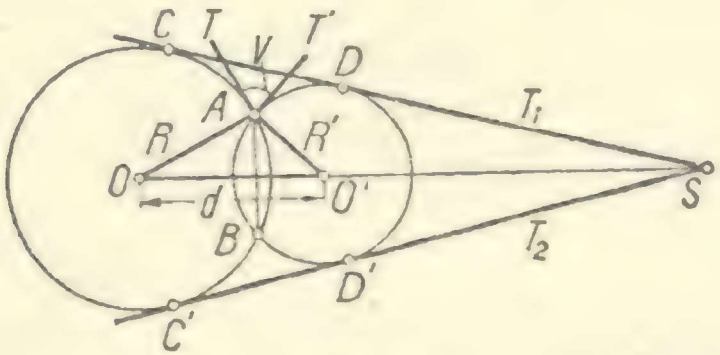



Fig. 50

intersecție $A$, $B$ sînt simetrice față de *linia centrelor* $OO'$; dreapta $AB$ se numește *coarda comună*. Au două *tangente comune exterioare* care se întîlnesc într-un punct $S$ pe linia centrelor. Unghiul $V$ al tangentelor celor două *cercuri într-unul din punctele de intersecție*, se numește *unghiul celor două cercuri*; dacă $V = 90°$ se zice că cercurile sînt *ortogonale* și triunghiul $OAO'$ este dreptunghic.

b) *Tangente interioare* (fig. 51) cînd se taie într-un singur punct (două puncte confundate) ambele cercuri avînd în acest punct o tangentă unică și fiind ambele situate de aceeași parte a ei. Relația $d = R - R'$ le caracterizează.

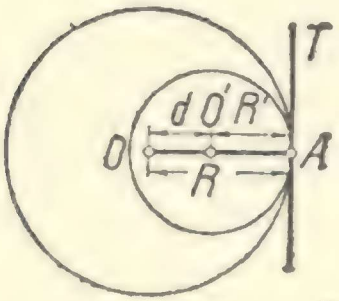


Fig. 51

c) *Tangente exterioare* (fig. 52) cînd se taie într-un punct în care au aceeași tangentă, cercurile fiind de-o parte și de alta a ei. Relația $d = R + R'$ le caracterizează; au și două tangente comune exterioare care se taie în $S$ pe linia centrelor.

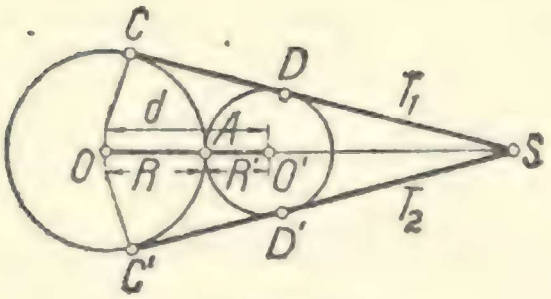


Fig. 52

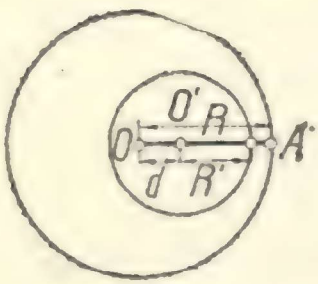


Fig. 53

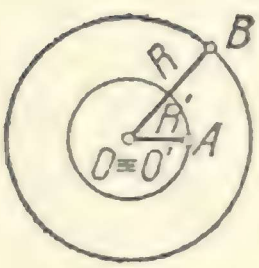


Fig. 54

d) *Interioare* (fig. 53) cînd toate punctele unuia sînt interioare celuilalt. Relația $d < R - R'$ le caracterizează. Dacă $d = 0$ (fig. 54). cercurile se numesc *concentrice*. Nu au tangente comune.

e) *Exterioare* (fig. 55) cînd punctele fiec rui cerc sînt exterioare celuilalt. Relaţia $d > R + R'$ le caracterizează. Au două tangente exterioare

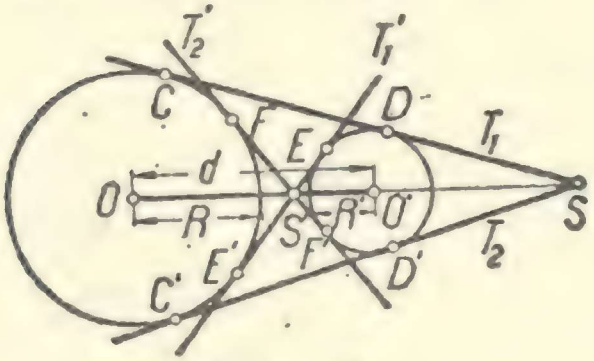



Fig. 55

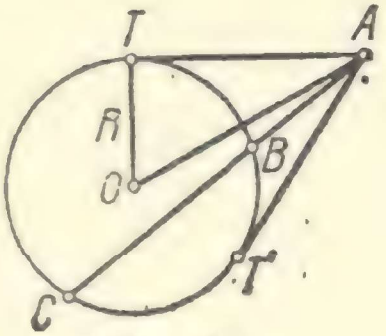



Fig. 56

$T_1$, $T_2$ şi două tangente interioare $T'_1$, $T'_2$ (§ 4.7.16) care se întîlnesc respectiv în două puncte $S$ şi $S'$ situate pe linia centrelor ; $S$ se numeşte *centrul de omotetie direct* iar $S'$ *centrul de omotetie invers* al celor două cercuri.

**6. Putere.** Se numeşte puterea $p_A$ a unui punct $A$ faţă de un cerc de rază $R$ (fig. 56) expresia

(232) $p_A = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AT^2 = AT'^2 = OA^2 - R^2$,

care este independentă de poziţia secantei $ABC$. Dacă $A$ este exterior $p_A > 0$, dacă $A$ este interior $p_A < 0$, iar dacă $A$ este pe cerc $p_A = 0$ (§ 4.3.2 e).

**7. Formule.** Lungimea cercului de rază $R$ este

(233) $l = 2\pi R$.

şi aria

(234) $S = \pi R^2$.

Lungimea unui arc $AB$ (fig. 57) are ca expresie

(235) $l_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = Rn^r$, unde $n^\circ$ este măsura arcului în grade iar $n^r$ în radiani.

Lungimea coardei este $l_{AB} = 2R \sin \dfrac{1}{2} \widehat{AOB}$.

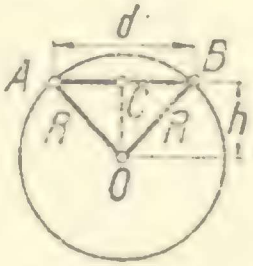


Fig. 57

Aria sectorului este

(236) $S_{AOBC} = \dfrac{1}{2} l_{\widehat{AB}} R = \dfrac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} = \dfrac{1}{2} R^2 n^r$.

Aria segmentului circular $ABC$ este

(237) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} (l_{\overset{\frown}{AB}} R - hd)$.

## § 4.3. Locuri geometrice

**1.** Se numește *loc geometric* (sau mai simplu *loc*), figura formată de mulțimea tuturor punctelor din plan (sau din spațiu) care se bucură de o aceeași proprietate. Locurile geometrice se definesc:

a) Printr-o relație metrică care caracterizează toate punctele locului.

b) Prin intersecția a două familii de curbe (sau de suprafețe în spațiu) care depind de un parametru și ale căror puncte comune aparțin locului.

**2. Exemple de locuri geometrice.**

a) Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix este un cerc.

b) Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de două drepte concurente sînt bisectoarele unghiurilor formate de aceste drepte (fig. 58).

c) Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de două puncte fixe $A$, $B$ este perpendiculara ridicată pe mijlocul segmentului $AB$, care se numește *mediatoarea* segmentului $AB$ (fig. 59).

d) Locul geometric al punctelor din plan din care se vede un segment dat, sub un unghi

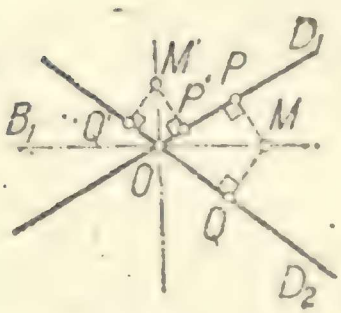



Fig. 58

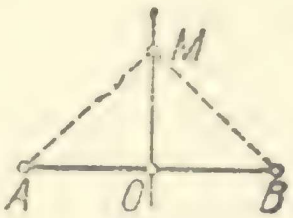



Fig. 59

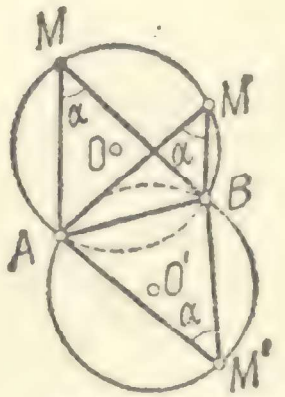



Fig. 60

$\widehat{AMB} = \alpha$ (fig. 60) este format din două arce $AMB$, $AM'B$ (simetrice față de $AB$); arcul $AMB$ se numește *arc capabil de unghiul* $\alpha$.

e) Locul geometric al punctelor din plan care au puteri egale față de două cercuri date $O$, $O'$ (fig. 61) este o dreaptă $D$ perpendiculară pe linia

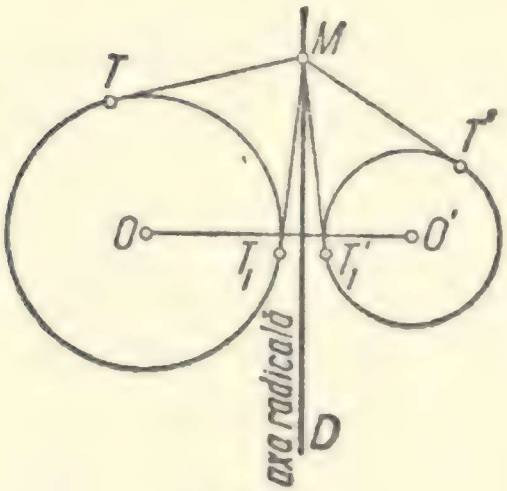



Fig. 61

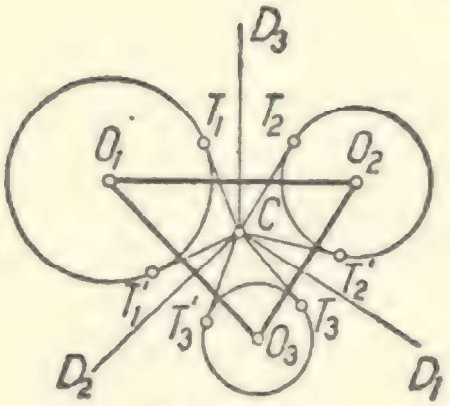



Fig. 62

centrelor și care se numește *axă radicală*. Ea este în același timp locul punctelor din plan din care se pot duce tangente egale la cele două cercuri. Dacă cercurile sînt secante, axa radicală este coarda lor comună, iar dacă sînt tangente, tangenta lor comună. Dacă cercurile sînt interioare, axa radicală va fi o dreaptă exterioară ambelor cercuri; în particular, două cercuri concentrice nu au axă radicală (se poate spune, prin convenție, că axa radicală este situată la infinit).

Fiind date trei cercuri (fig. 62) există un punct $C$ în planul lor, numit *centrul radical*, care are puteri egale față de cele trei cercuri; din $C$ se pot

duce tangente egale la cele trei cercuri. Centrul radical este intersecţia axelor radicale ale celor trei cercuri luate două cîte două.

## .4 Triunghiuri

**1. Triunghiuri oarecare.** Trei puncte care sînt pe o dreaptă, se numesc *coliniare*. Figura formată prin unirea a trei puncte care nu sînt coliniare se numeşte *triunghi* (fig. 63).

Pe lîngă laturile $a, b, c$ şi unghiurile triunghiului $A, B, C$ se mai consideră uneori şi *unghiurile exterioare* a căror măsură este $180°-A$, $180°-B$, $180°-C$. Între laturile unui triunghi $(a>b>c)$ avem dubla inegalitate

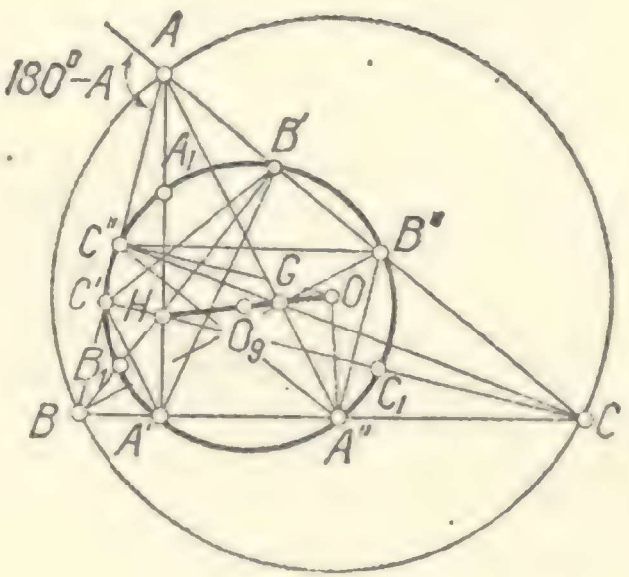


Fig. 63

(238) $b-c<a<b+c.$

Invers, cu trei segmente care satisfac acestei duble inegalităţi, se poate construi un triunghi.

Avem următoarele proprietăți:

a) Perpendicularele coborîte din vîrfuri pe laturile opuse, $AA'$, $BB'$, $CC'$ se numesc *înălțimile* triunghiului și sînt concurente într-un punct $H$ numit *ortocentrul* triunghiului. Triunghiul $A'B'C'$ se numește *triunghi ortic* și înălțimile $AA'$, $BB'$, $CC'$ sînt bisectoarele lui interioare.

b) Dreptele $AA''$, $BB''$, $CC''$ care unesc vîrfurile cu mijloacele laturilor opuse, se numesc *mediane* și sînt concurente într-un punct $G$ care este *centrul de greutate* al triunghiului considerat construit dintr-un material omogen. Punctul $G$ se găsește la două treimi de la vîrf, din fiecare mediană. Triunghiul $A''B''C''$ se numește *triunghi median*.

c) Dreptele perpendiculare pe mijloacele laturilor se numesc *mediatoare* și sînt concurente în *centrul O al cercului* circumscris triunghiului.

d) Punctele $A'$, $B'$, $C'$; $A''$, $B''$, $C''$ și $A_1$, $B_1$, $C_1$ mijloacele segmentelor $AH$, $BH$, $CH$, sînt *nouă* puncte pe un cerc, numit *cercul lui Euler* și al cărui centru îl notăm cu $O_9$.

e) Punctele $H$, $O$, $G$, $O_9$ sînt pe o dreaptă numită *dreapta lui Euler*; avem $GH = 2\,GO$.

f) Unghiurile triunghiului au șase *bisectoare*, trei *interioare* și trei *exterioare* (fig. 64). Cele interioare sînt concurente într-un punct $I$, care este *centrul cercului înscris;* două bisectoare exterioare sînt concurente cu cîte o bisectoare interioară în

trei puncte $I_a$, $I_b$, $I_c$, care sînt centrele a trei cercuri *exînscrise* triunghiului. Cele patru cercuri astfel construite reprezintă cercurile tangente la trei drepte neconcurente, laturile triunghiului.

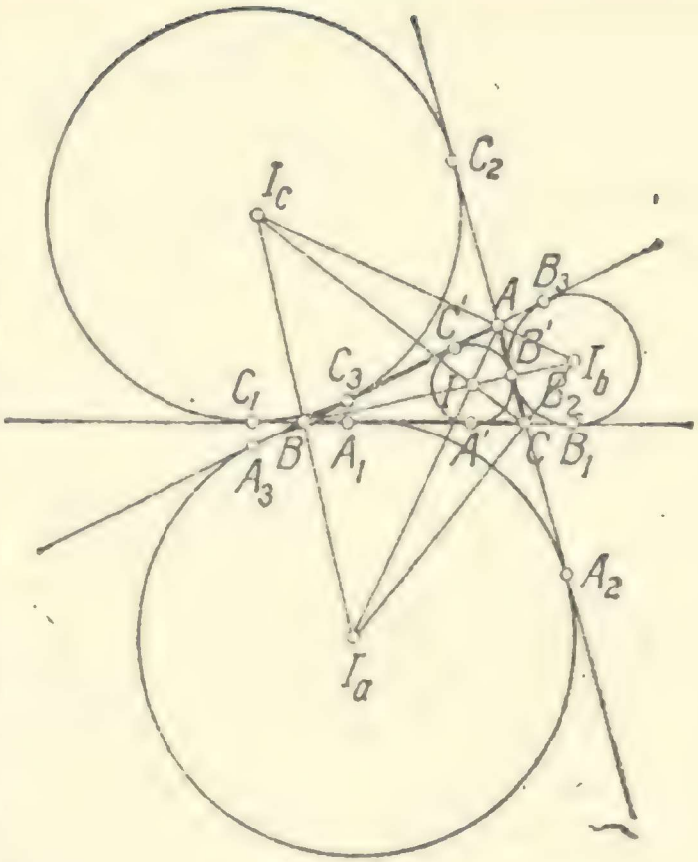



Fig. 64

**2.** Se zice că două triunghiuri $ABC$, $A'B'C'$ (fig. 65) sînt *egale* cînd se pot suprapune. Dacă suprapunerea se poate face mișcînd unul din triunghiuri fără a-l scoate din plan, se zice că triunghiurile sînt *direct egale;* în caz contrar se zice că sînt *invers egale* (în figură triunghiurile $AEC$, $A'B'C'$ sînt direct egale în timp ce triunghiurile $ABC$, $A''B''C''$ sînt invers egale).

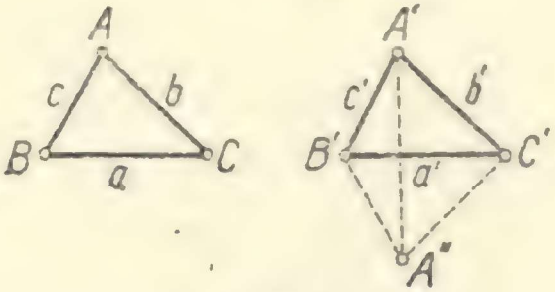



Fig. 65

Dacă două triunghiuri sînt egale, au toate laturile şi unghiurile egale.

Două triunghiuri sînt egale dacă şi numai dacă au:

a) Un unghi egal cuprins între două laturi egale ($A = A'$, $b = b'$, $c = c'$);

b) O latură egală cuprinsă între două unghiuri egale ($a = a'$, $B = B'$, $C = C'$);

c) Laturile egale două cîte două ($a = a'$, $b = b'$, $c = c'$).

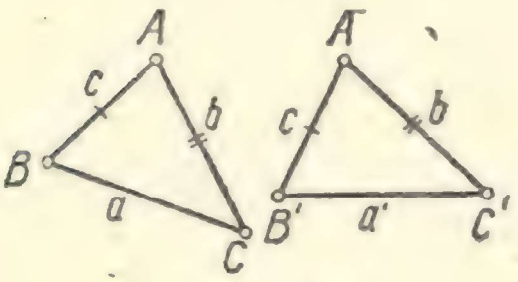



Fig. 66

Dacă în două triunghiuri (fig. 66) avem $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ şi $A \neq A'$, atunci la unghiul mai mic se opune latura mai mică ($BC < B'C'$) şi reciproc.

**3.** Se zice că două triunghiuri sînt asemenea (fig. 67), dacă şi numai dacă au:

a) Două unghiuri egale două cîte două ($B = B'$, $C = C'$);

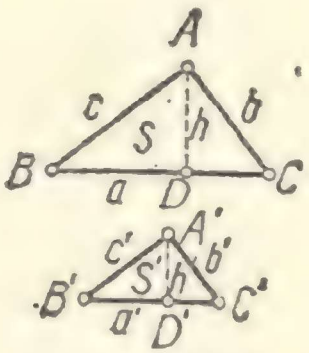



Fig. 67

b) Un unghi egal cuprins între două laturi proporţionale ($A = A'$, $b/b' = c/c'$);

c) Laturile proporţionale ($a/a' = b/b' = c/c'$).

Două triunghiuri asemenea au unghiurile egale două cîte două şi laturile opuse unghiurilor egale, proporţionale.

Cu notaţiile de pe figură, avem $S/S' = a^2/a'^2 = h^2/h'^2$.

**4.** Se zice că un triunghi este *orientat* dacă se dă un sens de parcurgere pe perimetrul său (fig.68). De obicei acesta se zice că este *pozitiv*, sau *direct*, dacă în parcurgerea perimetrului, suprafaţa triunghiului este lăsată la stînga. Pentru mulţimea punctelor interioare triunghiului, perimetrul său se zice că formează *frontiera* mulţimii.

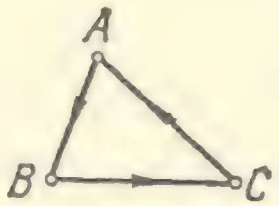


Fig. 68

**5.** *Relaţii metrice într-un triunghi oarecare* (segmentele barate sînt orientate § 4.1.1)

a) *Teorema bisectoarelor* (fig. 69). Dacă $D$ şi $E$ sînt picioarele bisectoarelor unghiului $A$, atunci

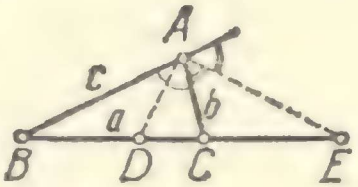


Fig. 69

$$(239)\quad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{c}{b};$$

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{c}{b};\quad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}};$$

ultima relație spune că punctele $B$, $C$, $D$, $E$ formează o *diviziune armonică* (§ 6.2).

b) *Teorema lui Pitagora generalizată.* Într-un triunghi oarecare

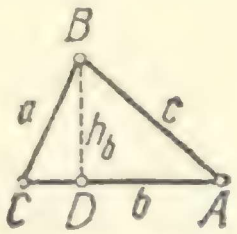



Fig. 70

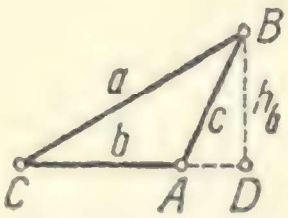



Fig. 71

(240) $a^2 = b^2 + c^2 - 2\varepsilon b\, AD$, $(\varepsilon = \pm 1)$, $\varepsilon = 1$, dacă $A$ este ascuțit (fig. 70), $\varepsilon = -1$ dacă $A$ este obtuz (fig. 71).

c) *Teorema lui Stewart* (fig. 72). Dacă $O$ este exterior dreptei $ACB$, atunci

$$(241)\quad \frac{OA^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} + \frac{OB^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}} + \frac{OC^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}} = 1.$$

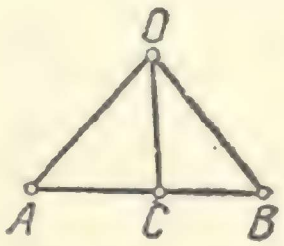



Fig. 72

Cu ajutorul acestei formule avem posibilitatea să calculăm pe $OC$, cunoscînd poziția lui $C$ pe $AB$ în triunghiul $AOB$.

d) *Teorema lui Menelaus* (fig. 73). Trei puncte $A'$, $B'$, $C'$ situate pe laturile unui triunghi sînt coliniare dacă și numai dacă

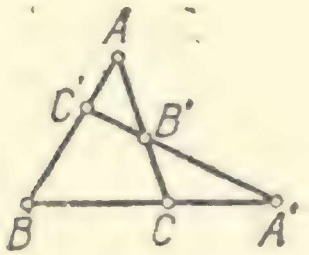


Fig. 73

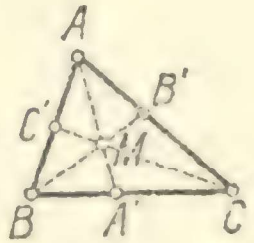


Fig. 74

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1. \tag{242}$$

e) *Teorema lui Ceva* (fig. 74). Trei drepte $AA'$, $BB'$, $CC'$ care trec prin vîrfurile unui triunghi (numite uneori *ceviene*) sînt concurente dacă și numai dacă

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1. \tag{243}$$

**6. Triunghiuri particulare.**

a) *Triunghiul dreptunghic* ($A = 90°$) (§ 3.3.1), are o singură înălțime (celelalte două confundîndu-se cu catetele) (fig. 75).

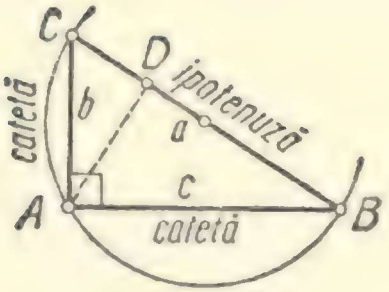



Fig. 75

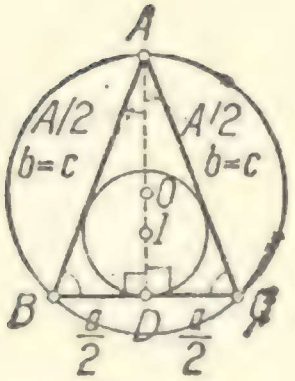



Fig. 76

Un triunghi este dreptunghic dacă şi numai dacă

(244) $a^2 = b^2 + c^2$ *(teorema lui Pitagora)*.

De asemenea, dacă şi numai dacă centrul cercului circumscris este la mijlocul uneia din laturi (ipotenuza). Avem de asemenea relaţiile

(245) $b^2 = a \cdot CD,\ c^2 = a \cdot BD,\ AD^2 = BD \cdot DC$

(246) $a = 2R,\quad r = p - a.$

b) *Triunghiul isoscel* (fig. 76). Este triunghiul care are două unghiuri egale ($B = C$) sau două laturi egale ($b = c$).

Un triunghi este isoscel dacă şi numai dacă: două din dreptele: înălţimea, mediana, bisectoarea unui aceluiaşi vîrf $A$ sînt confundate. Dacă două se confundă, se confundă şi a treia cu ele; una din egalităţile

(247) $h_b = h_c,\ m_b = m_c,\ l_b = l_c$

are loc, cînd vor avea loc şi celelalte.

Înălțimea vîrfului $A$ este axă de simetrie (§ 5.5.1) pentru triunghi. Dacă $l'_b = l'_c$ triunghiul poate fi isoscel, dar mai sînt și alte triunghiuri care se bucură de această proprietate și care se numesc triunghiuri *pseudoisoscele*.

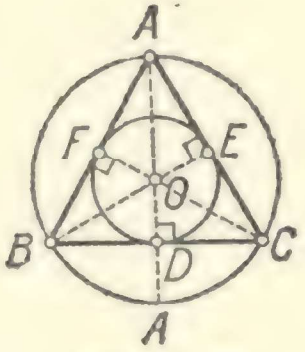


Fig. 77

c) *Triunghiul echilateral* (fig. 77) este triunghiul care are toate unghiurile egale ($A = B = C = 60°$) sau toate laturile egale ($a = b = c$). Înălțimea, mediana și bisectoarea fiecărui vîrf sînt confundate între ele. Ortocentrul, centrul de greutate și centrele cercurilor înscris și circumscris, sînt toate confundate în același punct. Cercul circumscris și cu cel înscris, sînt concentrice. Orice înălțime este axă de simetrie pentru triunghi. Avem relațiile

$$(248)\quad a = R\sqrt{3};\quad h_a = m_a = l_a = \ldots = \frac{3}{2}R,$$

$$S = 3\sqrt{3}\,R^2/4.$$

**7.** Se dau trei drepte concurente $OD_1$, $OD_2$, $OD_3$ și un fascicul de drepte paralele $ABC$, $A'B'C'$,

$A''B''C''$, ... (fig. 78). Dreptele sînt concurente dacă şi numai dacă

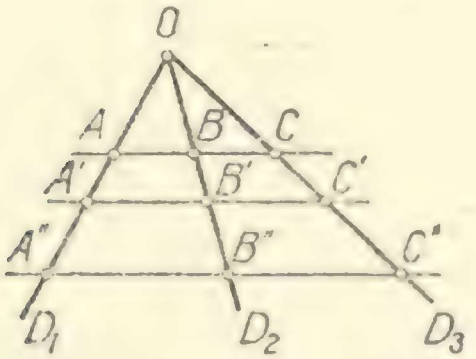



Fig. 78

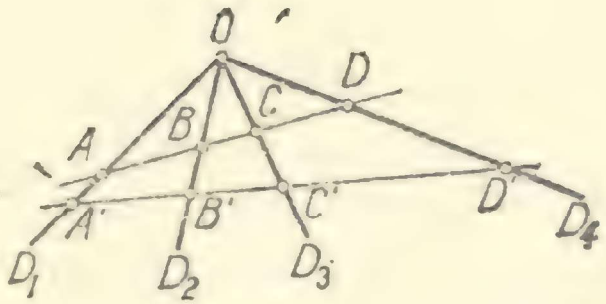



Fig. 79

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{B''A''}}{\overline{B''C''}} = \ldots \tag{249}$$

Se dau patru drepte concurente $OD_1$, $OD_2$, $OD_3$, $OD_4$ şi două secante oarecare $ABCD$, $A'B'C'D'$ (fig. 79), atunci

$$(ABCD) = (A'B'C'D') = \frac{\sin \widehat{COA}}{\sin \widehat{COB}} : \frac{\sin \widehat{DOA}}{\sin \widehat{DOB}}, \tag{250}$$

unde $(ABCD)$ este biraportul celor patru puncte (§ 6.2), şi se numeşte *biraportul dreptelor* $OD_1$, ... ..., $OD_4$.

## § 4.5. Patrulatere

**1.** Figura plană formată de patru puncte $A$, $B$, $C$, $D$ (din care trei nu sînt coliniare), se numește *patrulater*; un patrulater are 4 *vîrfuri*, 4 *laturi*, 2 *diagonale* (drepte care unesc două vîrfuri opuse) și 4 *unghiuri*. Patrulaterul se zice că este *convex* (fig. 80) dacă prelungindu-i laturile nu-i taie *suprafața* și *concav* în caz contrar (fig. 81). În cele ce urmează considerăm numai patrulatere convexe. Notînd unghiurile cu $A$, $B$, $C$, $D$ avem relațiile

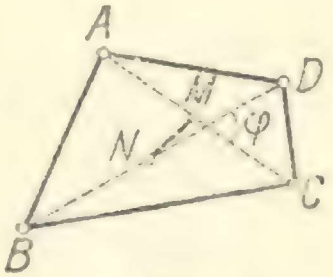


Fig. 80

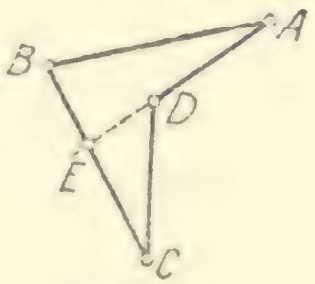


Fig. 81

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ, \tag{251}$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2, \tag{252}$$

$$4S = \sqrt{(2AC \cdot BD)^2 - (AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2)^2} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \varphi, \tag{253}$$

unde $S$ este aria patrulaterului, $M$, $N$ mijloacele diagonalelor, iar $\varphi$ unghiul diagonalelor.

**2.** Figura formată de patru drepte coplanare (din care trei nu sînt concurente), se numește *patrulater complet* (fig. 82). Un patrulater complet are 6 *vîrfuri*, 4 *laturi* și 3 *diagonale*.
Avem proprietățile:

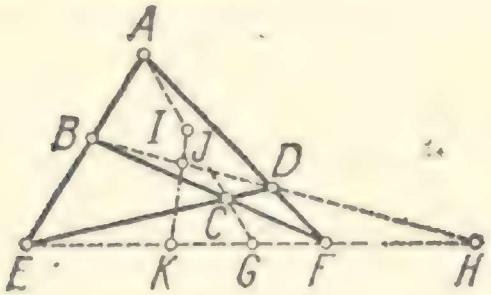


Fig. 82

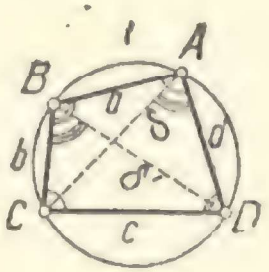


Fig. 83

a) Mijloacele diagonalelor sînt trei puncte coliniare.

b) $(EFGH) = -1$ (§ 6.2) (*teorema lui Pappus*).

**3. Patrulatere particulare.**

a) *Patrulaterul inscriptibil* este patrulaterul căruia i se poate circumscrie un cerc (fig. 83). Vîrfurile unui patrulater inscriptibil se numesc *puncte conciclice*. Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă:

α) Unghiurile opuse sînt suplimentare ($\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180°$).

β) Două laturi opuse fac cu cele două diagonale unghiuri egale ($\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ etc.).

Cu notațiile de pe figură avem relațiile:

(254) $ac + bd = \delta\delta'$ (*prima teoremă a lui Ptolomeu*, care este și reciprocă).

(255) $\dfrac{ad + bc}{ab + cd} = \dfrac{\delta}{\delta'}$ (*a doua teoremă a lui Ptolomeu*).

(256) $S = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}$ ($2p = a + b + c + d$, $S$ aria).

(257) $\delta^2 = \dfrac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{ab + cd}$,

$\delta'^2 = \dfrac{(ac + bd)\,(ab + cd)}{ad + bc}$.

(258) $R = \dfrac{(ab + cd)\delta}{4S} = \dfrac{(ad + bc)\delta'}{4S} =$

$= \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{(ac + bd)\,(ad + bc)\,(ab + cd)}{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}}$.

$S = \sqrt{abcd}$, dacă patrulaterul poate fi în același timp și circumscris unui al doilea cerc.

b) *Trapezul* (fig. 84) este un patrulater care are două *laturi paralele* $AB$, $CD$ numite *baze*, și două *laturi neparalele* $BC$, $AD$. Dacă $BC = AD$, tra-

pezul se numește *isoscel*, are diagonalele egale și este inscriptibil într-un cerc. Dacă din unghiurile trapezului unul este drept, trapezul se numește *dreptunghi*. Segmentul $BG$ care măsoară distanța dintre baze se numește *înălțime*. Dacă $E$, $F$ sînt mijloacele laturilor neparalele, atunci

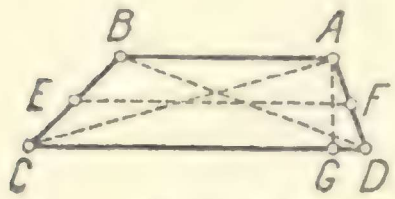


Fig. 84

$$(260)\quad \left|\begin{array}{l} EF = \dfrac{1}{2}(AB+CD); \\ S = \dfrac{1}{2}(AB+CD)AG = EF \cdot AG. \end{array}\right.$$

c) *Paralelogramul* (fig. 85) este caracterizat prin una din proprietățile:

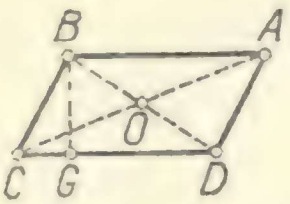


Fig. 85

α) Laturile opuse sînt paralele ($AB \| CD$, $AD \| BC$).

β) Unghiurile opuse egale ($\widehat{A} = \widehat{C}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$).

γ) Laturile opuse egale ($AB = CD$, $AD = BC$).

δ) Două laturi opuse și paralele ($AB = CD$ și $AB \| CD$).

ε) Diagonalele se taie în părți egale ($OA = OC$, $OB = OD$).

Cînd o proprietate are loc, au loc și celelalte patru. $O$ se numește *centrul* paralelogramului și este

*centrul de simetrie*. $BG$ se numește *înălțimea* paralelogramului și aria lui este egală cu

$$(261) \quad \boxed{S = AB \cdot BG.}$$

d) *Dreptunghiul* (fig. 86) este un paralelogram particular care are un unghi drept (cînd rezultă toate vor fi drepte); sau diagonalele egale. Este singurul paralelogram inscriptibil într-un cerc de rază $\frac{1}{2} AC$ și de centru $O$. Paralele duse prin $O$ la laturile dreptunghiului sînt *axe de simetrie* pentru dreptunghi, iar $O$ este *centru de simetrie*.

e) *Pătratul* (fig. 87) este un dreptunghi care are toate laturile egale; are de asemenea diagonalele perpendiculare și egale. Afară de simetriile dreptunghiului, are și diagonalele ca axe de sime-

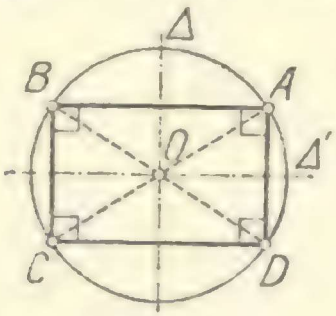


Fig. 86

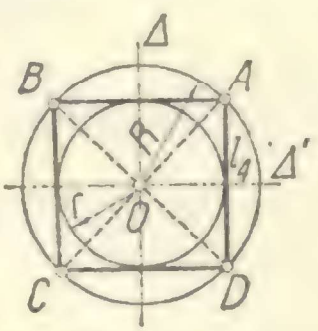


Fig. 87

trie. Este un patrulater care se poate înscrie și circumscrie unui cerc; primul are raza $\frac{1}{2} AC$ iar al doilea $\frac{1}{2} AB$. Notînd $R$ raza cercului cir-

cumscris, $r$ raza cercului înscris, $l_4$ latura și $S_4$ aria pătratului, atunci

$$(262)\quad \boxed{l_4 = R\sqrt{2},\ r = \frac{1}{2}R\sqrt{2} = \frac{1}{2}l_4,\ S_4 = 2R^2.}$$

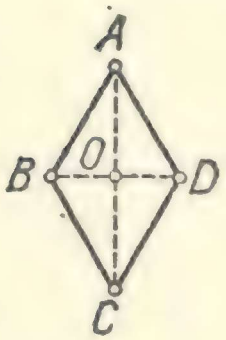


Fig. 88

f) *Rombul* (fig. 88) este paralelogramul care are:

α) Toate laturile egale.

β) Diagonalele perpendiculare.

Pătratul este un romb particular avînd diagonalele egale. Triunghiurile $ABD$, $BCD$ și $ABC$, $ACD$ sînt isoscele două cîte două. Are diagonalele ca axe de simetrie și centrul ca centru de simetrie.

## § 4.6. Poligoane

**1.** Se numește *linie poligonală* plană, o succesiune de segmente așezate cap la cap (fig. 89).

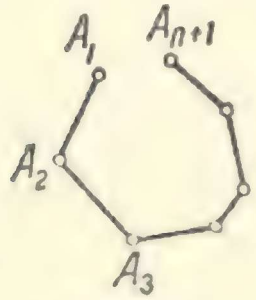


Fig. 89

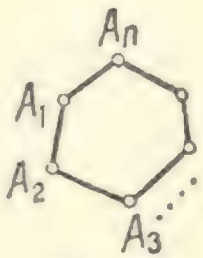


Fig. 90

Dacă originea $A_1$ se confundă cu extremitatea $A_{n+1}$, figura formată se numește *poligon* care poate fi *convex* (fig. 90) sau *concav* (fig. 91) (§ 4.5 1) Un poligon cu *n vîrfuri*

are $n$ *laturi* şi $\frac{1}{2}n(n-3)$ *diagonale*; suma unghiurilor interioare este egală cu $180^\circ\ (n-2)$.

O latură a unui poligon este mai mică decît suma celorlalte laturi. Două poligoane (fig. 92)

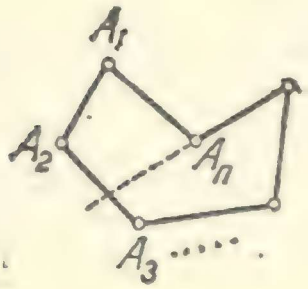



Fig. 91

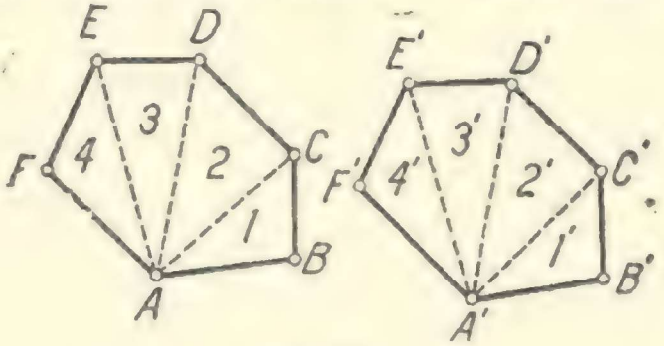



Fig. 92

cu acelaşi număr de laturi şi de aceeaşi natură (convexe sau concave în acelaşi timp) vor fi *egale* dacă se pot descompune în triunghiuri consecutive egale şi la fel aşezate.

**2.** Dacă un poligon convex are toate laturile şi unghiurile egale, se zice că este *regulat*; unghiul unui poligon regulat este egal cu $180^\circ\ (n-2)/n$. Un poligon regulat se poate *înscrie* sau *circumscrie* unui cerc, ambele avînd acelaşi centru care se numeşte *centrul* poligonului. Raza cercului circumscris se numeşte *raza* poligonului, iar raza cercului înscris, *apotema* poligonului. Notînd $l_n$ latura, $a_n$ apotema, $S_n$ aria, avem

(163) $$\boxed{S_n = \frac{1}{2}nl_na_n.}$$

3. Dacă împărţim un cerc de rază $R$ în $n$ părţi egale, şi unim punctele consecutive, se obţine un poligon regulat cu $n$ laturi. Dacă le unim din $p$ în $p$ şi dacă poligonul se închide trecînd prin toate punctele de diviziune, vom spune că poligonul este *stelat* cu $n$ laturi. La (§ 4.4.6, III) şi (§ 4.5.3, V) am dat elementele *triunghiului echilateral* şi *pătratului* în funcţie de $R$; avem de asemenea:

(264) $$l_5 = \frac{1}{2} R \sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$a_5 = \frac{1}{4} R (\sqrt{5} + 1).$$

(265) $$l_6 = R;$$

$$a_6 = \frac{1}{2} R \sqrt{3}.$$

(266) $$l_8 = R \sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

$$a_8 = \frac{1}{2} R \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

(267) $$l_{10} = \frac{1}{2} R (\sqrt{5} - 1);$$

$$a_{10} = \frac{1}{4} R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

(268) $$\left|\begin{array}{l} l'_5 = \dfrac{1}{2} R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}; \\ \\ l'_{10} = \dfrac{1}{2} R (\sqrt{5} + 1) \text{ (poligoane stelate).} \end{array}\right.$$

Dacă cunoaștem latura $l_n$ a poligonului regulat cu $n$ laturi, înscris în cercul de rază $R$, atunci

(269) $$l_{2n}^2 = R\left(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2}\right).$$

## § 4.7. Construcții geometrice cu rigla și compasul

**1.** *Să se împartă un segment $AB$ în două părți egale* (fig. 93). Din $A$ și $B$ ca centre, cu o rază $\left(> \dfrac{AB}{2}\right)$, se descriu două arce de cerc care se taie în $C$, $D$; $CD$ este perpendiculară pe $AB$ și o împarte în părți egale.

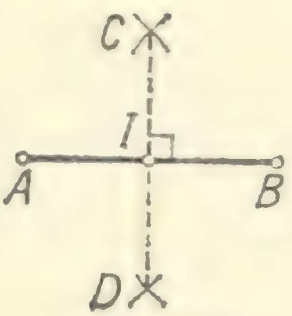


Fig. 93

**2.** *Printr-un punct $A$, să se ducă o perpendiculară pe o* dreaptă $\Delta$.

a) Din $A$ ca centru se descrie un cerc care taie pe $\Delta$ în $B$ și $C$; din $B$ și $C$ cu aceeași rază se descriu două arce care se taie în $D$ și $AD$ este perpendiculara

căutată (fig. 94 cînd $A$ este exterior şi f[illegible] cînd $A$ este pe dreaptă).

b) Dacă $A$ este la una din extremităţ[illegible] $\Delta$ (fig. 96), dintr-un punct arbitrar $O$ se descrie

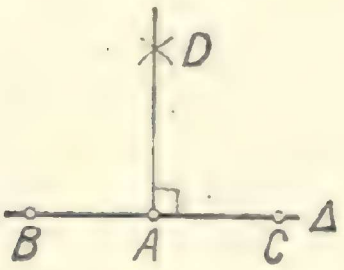



Fig. 94

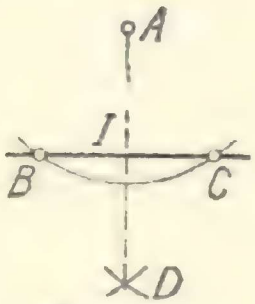



Fig. 95

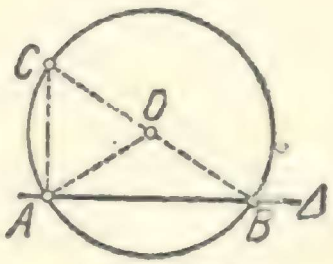



Fig. 96

un cerc cu raza $OA$, care taie din nou pe $\Delta$ în $B$; $OB$ taie cercul în $C$ şi perpendiculara este $AC$. Dacă $A$ este exterior (fig. 97) se duce dreapta $AB$ arbitrară pe care ca diametru se descrie un cerc care taie din nou pe $\Delta$ în $C$; perpendiculara este $AC$.

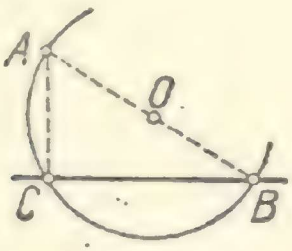



Fig. 97

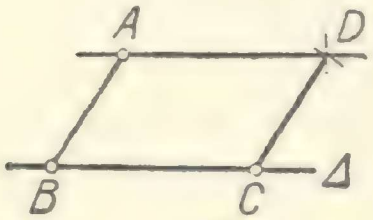



Fig. 98

**3.** *Printr-un punct $A$ exterior dreptei $\Delta$, să se ducă o paralelă la aceasta* (fig. 98). Se iau pe $\Delta$ punctele $B$, $C$ şi din $A$, $C$ ca centre se descriu două

respectiv de raze $BC$, $BA$ care se taie în $D$. căutată este $AD$.

**4.** *Să se împartă un segment $AB$ în părți proporționale cu trei* (sau mai multe) *lungimi date*

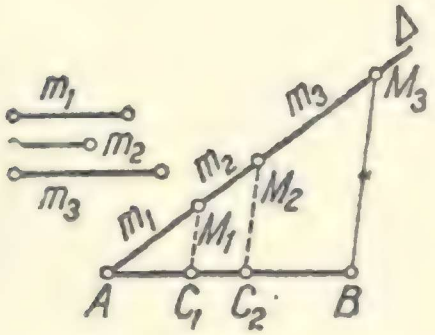



Fig. 99

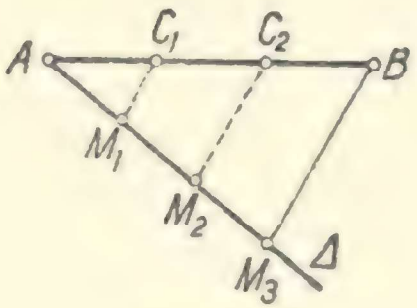



Fig. 100

$m_1$, $m_2$, $m_3$ *(sau trei numere date)* (fig. 99). Prin $A$ se duce o dreaptă arbitrară $\Delta$ pe care în continuare se măsoară $m_1$, $m_2$, $m_3$. Se unește ultima extremitate $M_3$ cu $B$ și prin punctele intermediare $M_1$, $M_2$ se duc paralele cu $BM_3$ care taie pe $AB$ în $C_1$, $C_2$ astfel ca $AC_1 / m_1 = C_1C_2 / m_2 = C_2B/m_3$. Dacă se dau trei numere $p_1$, $p_2$, $p_3$, se ia segment arbitrar $AU$ și se măsoară pe $\Delta$, $AM_1 = p_1AU$, ...

**5.** *Să se împartă un segment $AB$ în $n$ părți egale* ($n \in N$) (fig. 100). Se iau pe dreapta auxiliară $\Delta$, $n$ segmente egale și se continuă ca la problema precedentă.

**6.** *Fiind date segmentele* $OA$, $OB$, ..., *să se construiască segmentele* $OA'$, $OB'$, ... *astfel ca*

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \ldots = k.$$

Se ia pe dreapta $\Delta$ pe care sînt măsurate segmentele $OA$, $OB$, ... (fig. 101) un segment arbitrar $OU$, iar pe dreapta arbitrară $\Delta'$ segmentul $OU' = k\,OU$. Prin $A$, $B$, ... se duc paralele cu $UU'$ care taie pe $\Delta'$ în $A'$, $B'$,

**7.** *Prin punctul* $O$ (sau $A$) *să se ducă o dreaptă* $D$ *care să facă cu o dreaptă dată* $\Delta$ *un unghi* $\alpha$.

a) $O$ *este pe* $\Delta$ (fig. 102). Din vîrful unghiului şi din $O$ ca centre se descriu două cercuri egale; se măsoară arcele $\overset{\frown}{B'C'} = \overset{\frown}{B''C''} = \overset{\frown}{BC}$

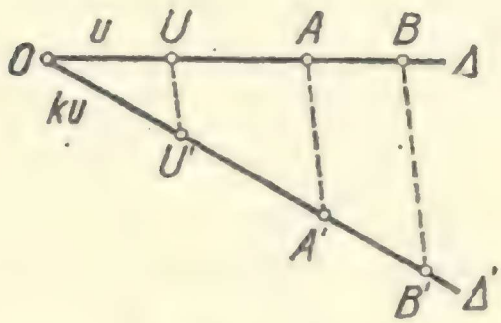



Fig. 101

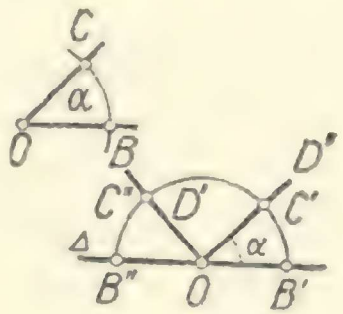



Fig. 102

tot cu compasul. Se obţin soluţiile $\overset{\frown}{B'OC'} = \overset{\frown}{B''OC''} = \alpha$.

b) *A este exterior lui* $\Delta$ (fig. 103). Se duce prin $A$ o paralelă cu $\Delta$ şi se procedează ca la cazul precedent obţinîndu-se dreptele $D'$ şi $D''$.

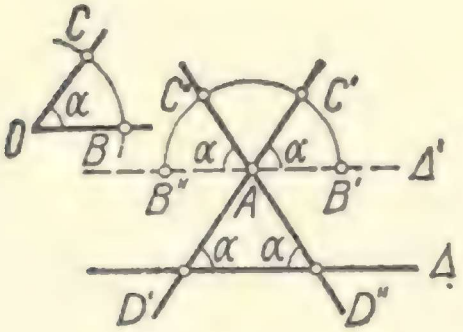



Fig. 103

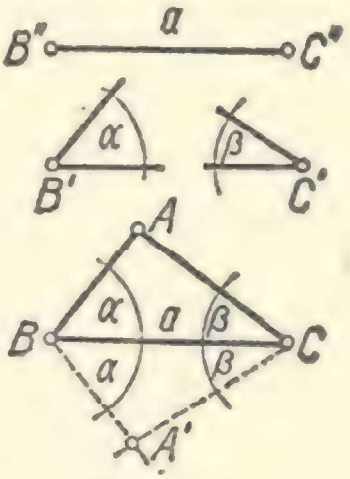
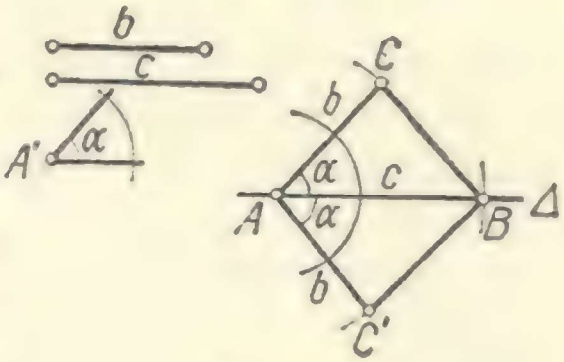



Fig. 104

8.*) *Să se construiască un triunghi cunoscîndu-i o latură* $a$ *şi unghiurile adiacente* $B$, $C$ (fig. 104). Se măsoară segmentul $BC = a$ şi în $B$, $C$ se construiesc unghiurile date. Se obţin două triunghiuri $ABC$, $A'BC$ invers egale (§ 4.4.2).

9. *Să se construiască un triunghi cunoscîndu-i două laturi* $b$, $c$ *şi unghiul cuprins* $A$ (fig. 105). Într-un punct $A$ pe o




FiS. 105

*) Pentru construcţiile 8—11 a se vedea (§ 3.3.2, cazurile de rezolvare).

dreaptă $\Delta$ se construiește unghiul $A$ de-o parte și de alta. Apoi pe $\Delta$ se măsoară $AB = c$, iar pe celelalte laturi $AC = AC' = b$. Se obțin triunghiurile $ABC$, $ABC'$ invers egale.

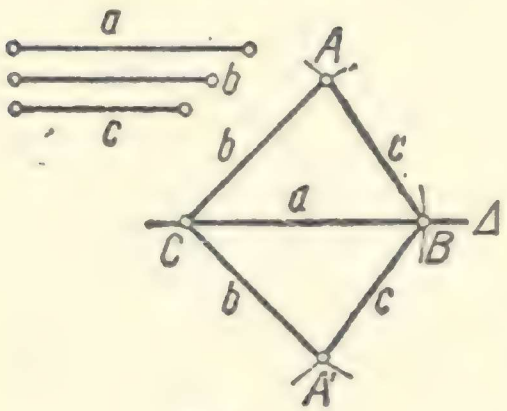
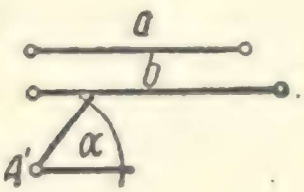



Fig. 106



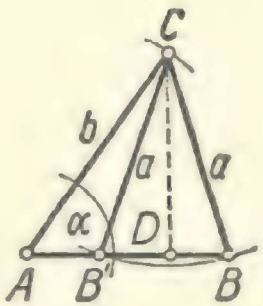




Fig. 107

**10.** *Să se construiască un triunghi cunoscîndu-i cele trei laturi* $a$, $b$, $c$ (fig. 106). Pe o dreaptă $\Delta$ se ia $BC = a$ și apoi în $B$ și $C$ se construiesc două arce de raze $b$ și $c$ care se taie în punctele $A$, $A'$ care dau triunghiurile $ABC$, $A'BC$ invers egale.

**11.** *Să se construiască un triunghi cunoscîndu-i două laturi* $a$, $b$ *și unghiul* $A$ *opus uneia din ele.*

*Cazul* I (fig. 107) $A<90°$, $b \geqslant a \geqslant b \sin A$. Pe una din laturile unghiului $A$ se construiește $AC = b$ și din $C$ ca centru se descrie un arc de rază $a$ care taie cealaltă latură în $B$ și $B'$ ($b>a$) care dă triunghiurile $ACB$, $ACB'$ (2 soluții); dacă $a = b$, $A \equiv B'$ și avem triunghiul isoscel $ABC$ (1 solu-

tunghic $ACD$ (1 soluție).

*Cazul* II (fig. 108) $A \geqslant 90°$, $a > b$. Aceeași construcție conduce la triunghiul $ABC$ (1 soluție)

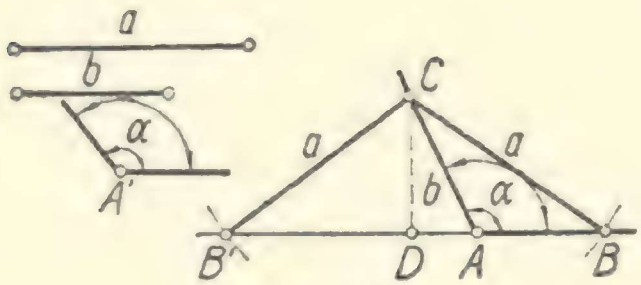



Fig. 108

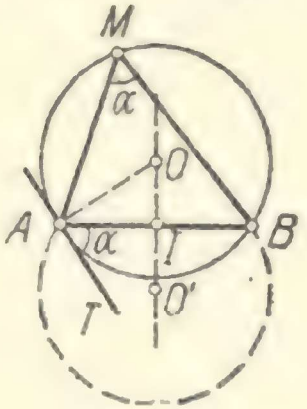



Fig. 109

sau triunghiul dreptunghic $CDB$ (precum și inversul său $CDB'$) (1 soluție).

**12.** *Pe segmentul $AB$ să se construiască un arc de cerc capabil de unghiul dat $\alpha$* (fig. 109). În $A$ se construiește $\widehat{BAT} = \alpha$. Perpendicularele în $A$ pe $AT$ și pe mijlocul lui $AB$ se taie în $O$. Arcul $AMB$ *și simetricul său față de* $AB$ sînt soluțiile problemei.

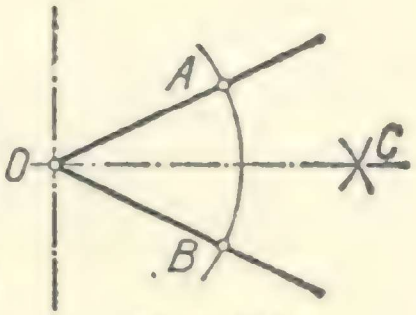



Fig. 110

**13.** *Să se construiască bisectoarele unui unghi.* a) *Vîrful $O$ este accesibil* (fig. 110). Se construiește un arc cu centrul în $O$, care taie laturile în $A$ și $B$; din aceste puncte, cu aceeași deschidere de compas se con-

struiește $C$: bisectoarea interioară este $OC$; perpendiculara pe ea în $O$ este bisectoarea exterioară.

b) *Vîrful $O$ este inaccesibil* (fig. 111). Pe laturile unghiului se construiesc perpendicularele $\Delta_1$ și

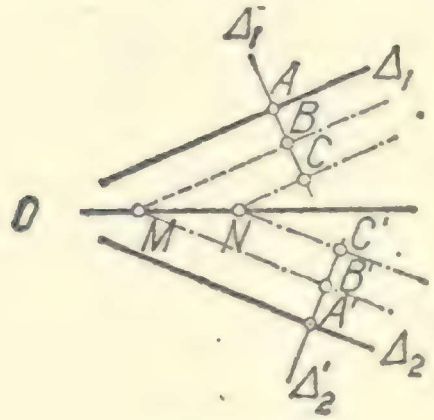



Fig. 111

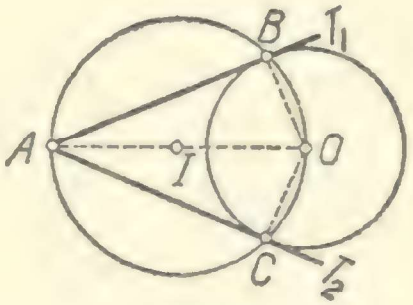



Fig. 112

$\Delta_2'$ pe care se iau segmentele $AB = A'B'$, $AC = A'C'$. Prin $B$ și $C$, respectiv $B'$ și $C'$ se duc paralele cu laturile unghiului care se taie în $M$, $N$ pe bisectoarea căutată.

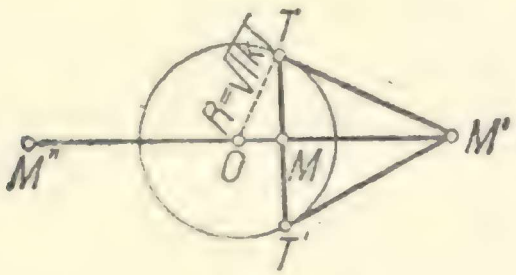



Fig. 113

**14.** *Să se ducă printr-un punct exterior $A$, tangente la un cerc $O$* (fig. 112). Pe $OA$ ca diametru se descrie un cerc auxiliar care taie cercul dat în $B$ și $C$; dreptele $AB$, $AC$ sînt tangentele căutate.

**15.** *Fiind date punctele $O$ și $M$, să se determine punctul $M'$* astfel ca: $OM \cdot OM' = k$ (fig. 113).

Se construieşte un cerc cu centrul în $O$ şi de rază $\sqrt{|k|}$; avem două cazuri:

a) Dacă $M$ este interior, se duce o perpendiculară pe $OM$ care taie cercul în $T$ şi tangenta în $T$ taie pe $OM$ în $M'$;

b) Dacă $M$ este exterior (pe figură $M'$), se duc tangentele $MT$, $MT'$ iar $TT'$ taie pe $OM$ în $M'$ (pe figură $M$). Această construcţie este făcută în ipoteza $k>0$; cînd $k<0$, vom lua pentru $M'$, punctul $M''$ simetricul lui $M'$ faţă de $O$.

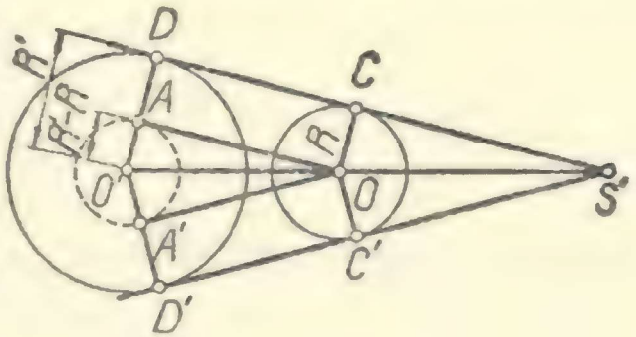



Fig. 114

**16.** *Să se construiască tangentele comune la două cercuri exterioare date.*

a) *Tangente exterioare* (fig. 114). Fie $R$ raza cercului $O$ şi $R'$ raza cercului $O'(R'>R)$. Cu centrul în $O'$ se construieşte cercul de rază $R'-R$ şi i se construiesc tangentele duse din $O$. La distanţa $R$ de aceste tangente se găsesc tangentele căutate.

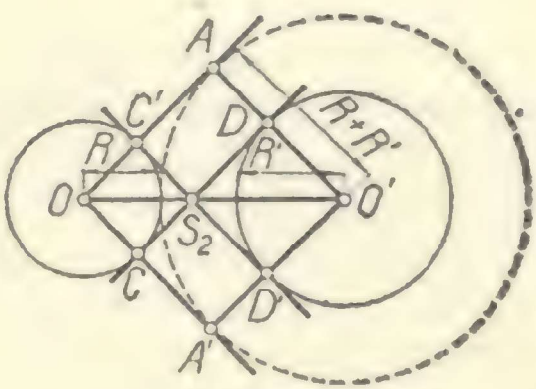



Fig. 115

b) *Tangente interioare* (fig. 115). Aceeaşi metodă numai că cercul auxiliar va fi de rază $R+R'$.

**17.** *Să se găsească a patra proporțională a trei segmente date a, b, c (sau a trei numere a, b, c)* $(a/b = c/x)$ (§ 1.3.4) (fig. 116). Pe laturile unui

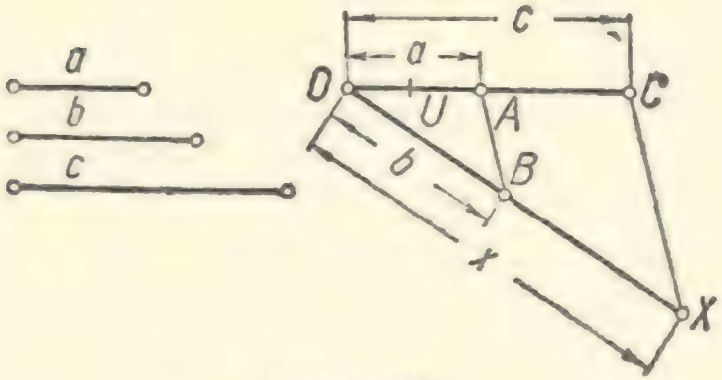



Fig. 116

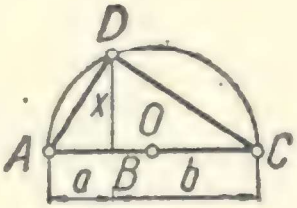



Fig. 117

unghi se așază segmentele ca în figură; se unește $A$ cu $B$ și prin $C$ se duce o paralelă cu $AB$. Avem $OX = x$. Dacă se dau trei numere, se ia un segment arbitrar $OU = u$ și apoi, $OA = au$, $OB = bu$, $OC = cu$.

**18.** *Să se construiască media proporțională a două segmente (două numere) a, b, adică* $x^2 = ab$ (fig. 117). Fie $AB = a$, $BC = b$ și pe $AC$ ca diametru se construiește un semicerc care este tăiat de perpendiculara în $B$ pe $AC$ astfel ca $BD = x$.

**19.** *Să se înscrie într-un cerc O un pătrat, un octogon regulat, ș.a.m.d.* (fig. 118). Vîrfurile pătratului sînt punctele unde două diametre perpendiculare taie cercul. Pentru octogon se coboară perpendiculare din $O$ pe laturi care taie cercul în patru puncte care împreună cu vîrfurile pătra-

tului determină vîrfurile octogonului. Pentru un poligon regulat cu 16 laturi se repetă construcţia faţă de laturile octogonului ş.a.m.d.

**20.** *Să se înscrie într-un cerc O un triunghi echilateral, un exagon regulat, un poligon regulat cu*

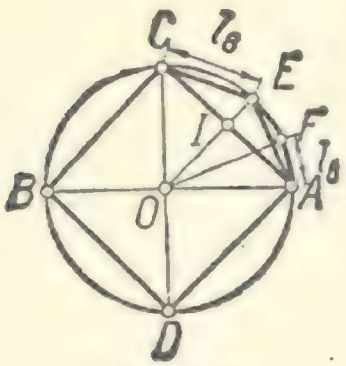


Fig. 118

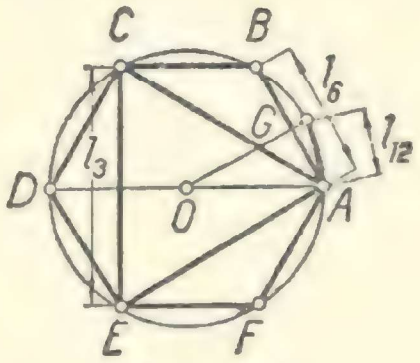


Fig. 119

*12 laturi, ş.a.m.d.* (fig. 119). Purtînd pe cerc coarde egale cu raza cercului, se obţin 6 puncte care sînt vîrfurile unui exagon regulat înscris în cerc. Unindu-se vîrfurile din două în două obţinem triunghiul echilateral înscris. Trecerea la un poligon regulat cu 12 laturi se face ca de la pătrat la octogon (§ 4.7.19).

**21.** *Să se înscrie într-un cerc dat O, un pentagon regulat, un decagon regulat ş.a.m.d.* (fig. 120). În cerc se construiesc diametrele perpendiculare $A_1A'$, $NN'$; din $M$, mijlocul lui $A'O$, ca centru se descrie un cerc de rază $MN$ care taie diametrul

$A_1A'$ în $P$ și $Q$. Avem $l_{10} = OP$ iar $l'_{10} = OQ$ (decagon stelat) ș.a.m.d. Pentagonul se obține unind vîrfurile decagonului din două în două.

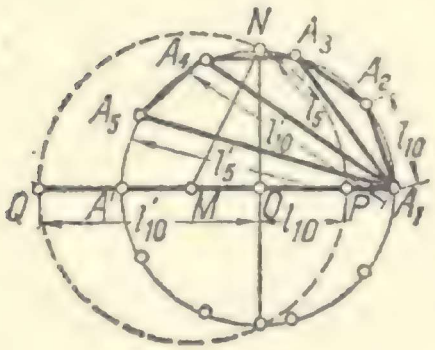



Fig. 120

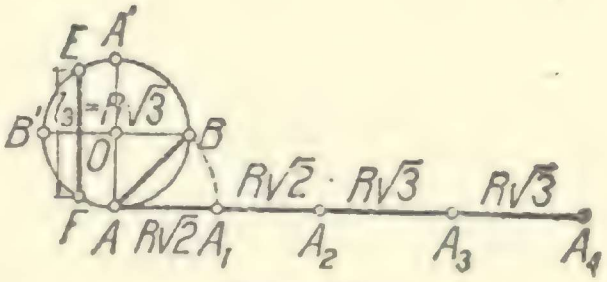



Fig. 121

**22.** *Să se dea o construcție aproximativă a desfășuratei cercului pe o dreaptă* $\Delta$ (fig. 121). Se așază una după alta de două ori $l_4$ și de două ori $l_3$, deoarece $2(l_4 + l_3) = 2R(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2R \times 3{,}14$.

# 5. GEOMETRIA EUCLIDIANĂ A SPAȚIULUI

## § 5.1. Drepte și plane

**1. Drepte și plane paralele.** Planul este suprafața pe care așezînd o dreaptă, îi conține toate punctele. O dreaptă împarte un plan în două *semiplane*; un plan împarte spațiul în trei regiuni dintre care una este formată din punctele planului. Față de un plan, o dreaptă poate avea una din pozițiile (fig. 122):

a) Conținută în plan. b) Are un singur punct în plan. c) *Paralelă* cu planul, cînd nu are nici un punct comun cu el. Un plan poate fi definit prin trei puncte necoliniare, o dreaptă și un punct exterior ei, două drepte paralele. Două plane distincte, care au un punct comun, au o infinitate de puncte comune situate pe o dreaptă, *dreapta de intersecție* a celor două plane. Două plane care nu au nici un punct comun, se zice că sînt *paralele*.

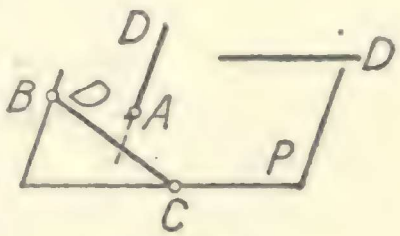


Fig. 122

Printr-o dreaptă $D$ (fig. 123) trec o infinitate de plane care formează un *fascicul* avînd ca *muchie* pe $D$. Un plan al fasciculului este determinat prin muchie și un punct $A$ exterior ei; iar un fascicul este determinat prin două plane ale sale $P_1$, $P_2$.

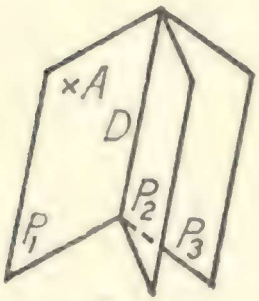


Fig. 123

Două drepte distincte în spațiu pot:

a) Să fie *concurente*, cînd au un punct comun. b) Să fie *paralele*. c) Să nu aibă nici un punct comun și nici să fie paralele, cînd se zice că sînt *strîmbe* în spațiu.

Prin unghiul a două asemenea drepte, înțelegem unghiul paralelelor duse printr-un punct al spațiului.

2. Două drepte paralele cu o a treia sînt paralele între ele. Dacă $D$ este paralelă cu planul $P$ (fig. 124), orice plan $Q$ care trece prin $D$ taie $P$

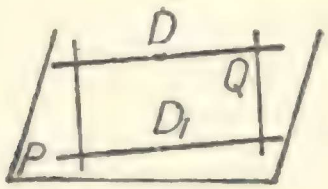


Fig. 124

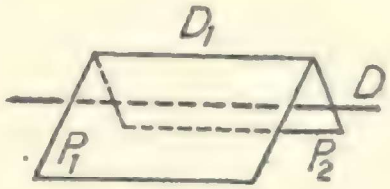


Fig. 125

după o dreaptă $D_1$ paralelă cu $D$. Două plane $P_1$, $P_2$ paralele cu aceeași dreaptă $D$ se taie după o dreaptă $D_1$ paralelă cu $D$ (fig. 125). Orice dreaptă $D$ dintr-un plan $P$ paralel cu un plan $Q$ este para-

lelă cu planul $Q$ (fig. 126). Invers, un plan $Q$, paralel cu două drepte dintr-un plan $P$ este paralel cu $P$. Printr-un punct exterior unui plan $P$ se poate duce un plan $Q$ paralel cu acesta și numai

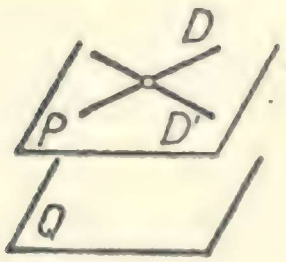


Fig. 126

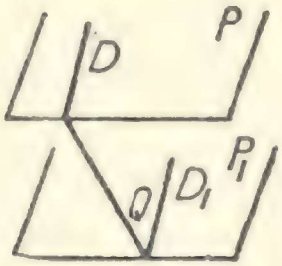


Fig. 127

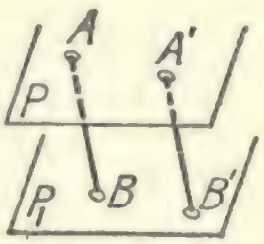


Fig. 128

unul. Două plane paralele $P$, $P_1$ sînt tăiate de un al treilea $Q$ după două drepte paralele (fig. 127). Două plane paralele (fig. 128) determină pe două drepte paralele segmente egale ($AB = A'B'$). Trei sau mai multe plane paralele (fig. 129) deter-

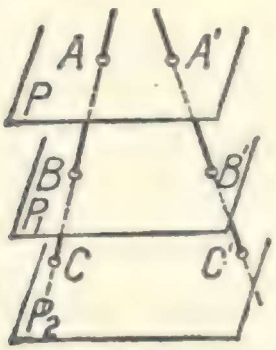


Fig. 129

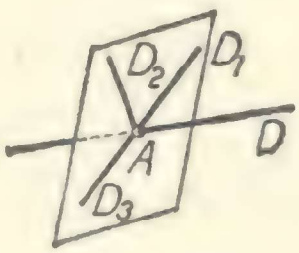


Fig. 130

mină pe două secante, segmente proporționale ($AB/BC = A'B'/B'C'$).

**3. Drepte și plane perpendiculare.** Într-un punct $A$ situat pe dreapta $D$ (fig. 130) se pot duce o

infinitate de drepte perpendiculare pe ea care formează un plan *P perpendicular* pe dreapta *D*; dreapta *D* se numește *normală* pe planul *P*. Dintr-un punct exterior unui plan se poate duce o singură perpendiculară pe el. Un plan *P* are o infinitate de normale toate paralele între ele. Invers, o dreaptă *D* este *perpendiculară* pe un plan

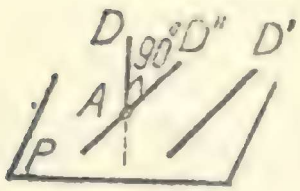


Fig. 131

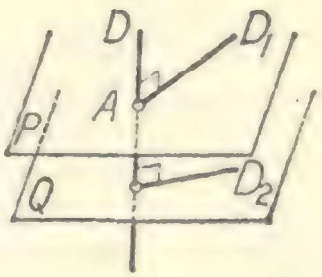


Fig. 132

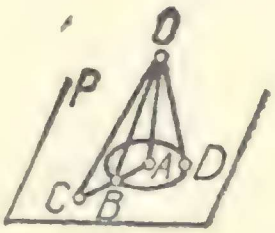


Fig. 133

*P* (fig. 131), dacă este perpendiculară pe paralela ei dusă prin *A*.

O dreaptă perpendiculară pe un plan *P*, va fi perpendiculară pe orice plan *Q* paralel cu *P* (fig. 132). Pentru ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan este suficient să fie perpendiculară pe două drepte concurente ale planului. Printr-un punct al spațiului se poate duce un plan și numai unul perpendicular pe o dreaptă. Două plane perpendiculare pe o dreaptă, sînt paralele între ele.

Dacă dintr-un punct *O*, exterior unui plan (fig. 133) ducem pe acest plan perpendiculara și mai multe *oblice*, atunci:

a) Perpendiculara $OA$ este mai mică decît orice oblică $OB$ şi reprezintă distanţa punctului $O$ la plane.

b) Toate oblicele egal depărtate de *piciorul* perpendicularei sînt egale şi reciproc.

c) Dintre două oblice, cea care este mai aproape de piciorul perpendicularei, este mai mică şi reciproc. $A$ se numeşte *proiecţia* lui $O$ pe planul $P$.

**4. Unghiul diedru** a două semiplane (fig. 134). care formează *feţele* unghiului, este egal cu unghiul $V$ determinat de cele două feţe pe un plan $Q$ perpendicular în $O$ pe muchie (egal şi cu unghiul perpendicularelor în $O$ pe fiecare din feţe); *planul bisector*, este planul care-l împarte în două diedre egale (care au aceeaşi măsură).

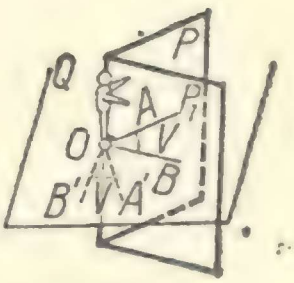


Fig. 134

Dacă două plane sînt perpendiculare (fig. 135), orice perpendiculară pe intersecţia lor şi situată într-unul din plane, este perpendiculară pe celălalt plan; un plan este perpendicular pe un al doilea plan, dacă conţine o perpendiculară pe acesta sau este paralel cu o asemenea perpendiculară. Un plan şi o dreaptă (fig. 136) perpendiculare pe acelaşi plan, sînt paralele între ele.

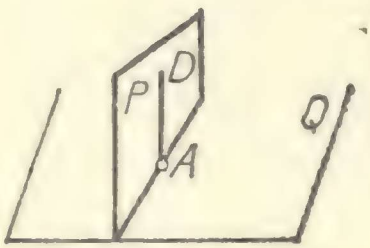


Fig. 135

Dacă două plane $P$, $Q$ sînt perpendiculare pe un al treilea $R$ (fig. 137), dreapta lor de intersecție este perpendiculară pe $R$.

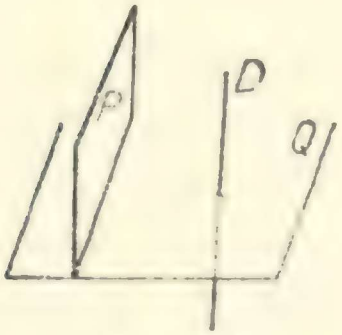


Fig. 136

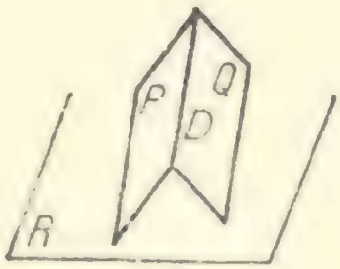


Fig. 137

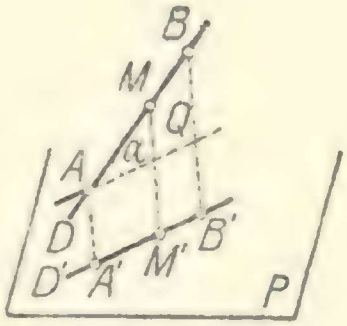


Fig. 138

Locul geometric al proiecțiilor punctelor unei drepte $D$ pe un plan $P$, este un plan $Q$ perpendicular pe planul $P$ (fig. 138). Intersecția planelor $P$, $Q$ este o dreaptă $D'$, *proiecția* dreptei $D$ pe planul $P$. Unghiul $\alpha$ pe care-l fac dreptele $D$, $D'$ între ele măsoară *unghiul dreptei D cu planul P*; el este unghiul cel mai mic pe care-l face $D$ cu o dreaptă oarecare a planului $P$. Proiecțiile unui segment pe două plane paralele, sînt egale între ele.

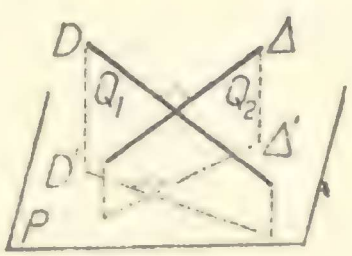


Fig. 139

*Teorema celor trei perpendiculare*. Dacă $D'$, $\Delta'$ sînt proiecțiile a două drepte din spațiu $D$, $\Delta$ (fig. 139) pe planul $P$, atunci două din proprietățile:

a) Dreptele $D$, $\Delta$ sînt perpendiculare.
b) Una din drepte este paralelă cu $P$.
c) Proiecţiile $D'$, $\Delta'$ sînt perpendiculare, au ca consecinţă pe a treia.

## § 5.2. Corpuri solide determinate de drepte şi plane

**1. Unghi poliedru** este figura geometrică formată de mai multe plane concurente într-un punct $O$ numit *vîrf*. Intersecţiile planelor se numesc *muchii* care mărginesc între ele *feţele* poliedrului (fig. 140). Dacă unghiul poliedru este situat de aceeaşi parte a feţelor se zice că unghiul este *convex*. *Triedru* este unghiul poliedru cu trei feţe

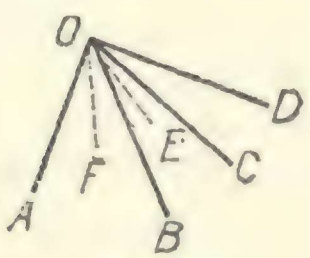


Fig. 140

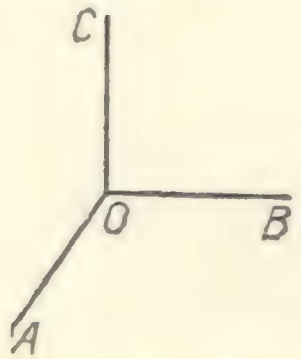


Fig. 141

şi trei muchii. Dacă are muchiile perpendiculare două cîte două, se zice că este *tridreptunghic*. În acest caz fiecare muchie este perpendiculară pe faţa determinată de celelalte două (fig. 141).

Se numește *corp solid*, o porțiune din spațiul cu trei dimensiuni.

**2. Poliedru** este un corp solid mărginit de suprafețe plane (fig. 142) și are: *fețe* (*ABC*, *ACD*...), *muchii* (*AB*, *AC*, *AD*,...), *vîrfuri* (*A*, *B*, *C*,...), *unghiuri diedre* [(*ABC*), (*ABD*), ...], unghiuri solide [(*A*, *BCD*), (*B*, *ACD*), ...], diagonale (*AE*, *BF*, ...). *Aria* poliedrului este suma tuturor ariilor fețelor iar volumul este porțiunea din spațiu care definește corpul. Se zice că poliedrul este *convex* cînd se află de aceeași parte a tuturor fețelor sale. Fețele unui poliedru convex sînt poligoane convexe.

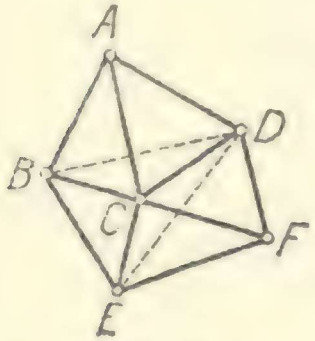


Fig. 142

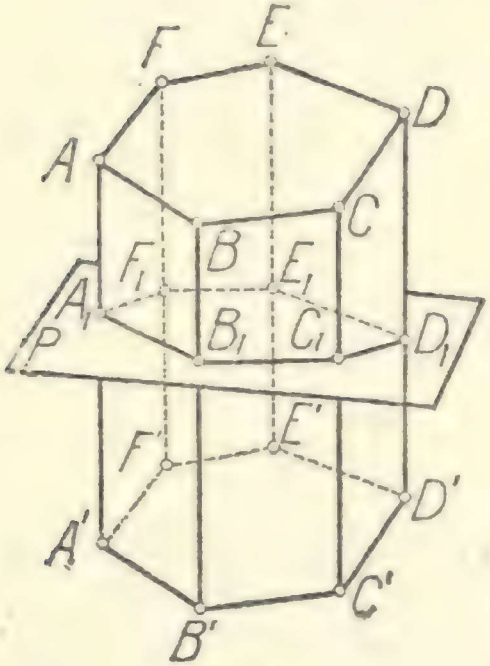


Fig. 143

**3. Suprafață prismatică** (fig. 143) este suprafața determinată de plane paralele *(fețele)* mărginite la intersecțiile lor consecutive *(muchiile)*. *Secțiunea* făcută în suprafață cu un plan $P$, care nu este paralel cu muchiile, este un poligon care are același număr de laturi oricare ar fi $P$; *secțiunea dreaptă* este făcută printr-un plan perpendicular pe muchii.

*Prisma* (fig. 151) este un poliedru obținut dintr-o suprafață prismatică prin două secțiuni paralele care se numesc *bazele* prismei. *Fețele laterale* ale unei prisme sînt paralelograme; distanța dintre baze se numește *înălțimea* prismei. Dacă planele bazelor sînt perpendiculare pe muchii, prisma se numește *dreaptă*, iar dacă și bazele sînt poligoane regulate, prisma se numește *regulată*. În particular, dacă bazele sînt paralelograme, prisma se numește *paralelipiped* (fig. 152). Paralelipipedul care are toate muchiile egale se numește *romboedru* și are toate fețele romburi. Dacă are muchiile laterale perpendiculare pe baze, paralelipipedul se numește *dreptunghic* (fig. 153). Romboedrul dreptunghic se numește *cub* (fig. 154).

4. **Piramida** (fig. 155) este corpul ce se obține tăind un unghi poliedru cu un plan care-i întîlnește toate muchiile; poligonul tăiat de acest plan, se numește *baza* piramidei iar fețele și muchiile poliedrului se numesc *fețele laterale* și *muchiile* piramidei. Perpendiculara coborîtă din *vîrful* piramidei (vîrful unghiului poliedrului) pe bază, se numește *înălțime*. Se zice că piramida este *regulată* dacă baza este un poligon regulat și înălțimea cade în centrul acestuia; fețele sînt triunghiuri isoscele a căror înălțime (aceeași pentru toate) se numește *apotema* piramidei (fig. 156). Piramida

*) Figurile se găsesc în tabelul T. 17.

cu baza un triunghi se numeşte *tetraedru* (fig. 157) care este *regulat* cînd are toate muchiile egale (fig. 144).

*Suprafaţă piramidală* (fig. 145) este suprafaţa

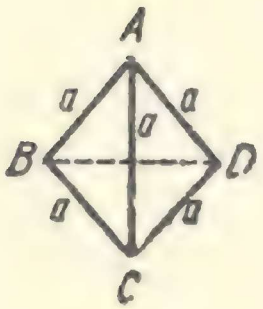



Fig. 144

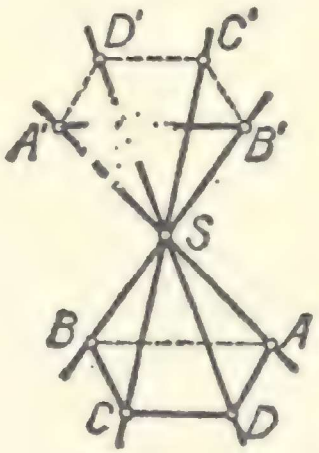



Fig. 145

laterală a unei piramide prelungită dincolo de vîrf şi bază.

**5. Trunchi de prismă** este corpul mărginit de o suprafaţă prismatică şi două secţiuni plane numite *bazele* trunchiului. În fig. 158 avem un trunchi de prismă triunghiular iar în fig. 159 un trunchi de prismă cu patru feţe laterale (grămada de nisip). *Pana* este trunchiul de prismă din (fig. 160).

**6. Trunchi de piramidă** este corpul ce se obţine făcînd într-o piramidă o secţiune paralelă cu baza (fig. 161).

## § 5.3. Suprafețe. Corpuri rotunde

**1. Suprafața cilindrică** este suprafața născută de o dreaptă *generatoare* $AA'$ care se deplasează paralel cu o direcție dată și se sprijină pe o *curbă directoare* $C$ (fig. 146). Porțiunea dintr-o suprafață cilindrică limitată de două secțiuni paralele *(baze)* se numește *cilindru* (fig. 162); dacă secțiunile sînt perpendiculare pe generatoare, cilindrul se numește *drept*. Distanța între baze se numește *înălțime*; dacă bazele unui cilindru drept sînt cercuri, cilindrul este de *rotație* (fig. 163). Dreapta $OO'$ se numește *axa* cilindrului. Se numește *trunchi de cilindru de rotație* (fig. 164) corpul obținut dintr-un cilindru de rotație secționat prin două plane *(bazele)* care nu sînt perpendiculare pe axă.

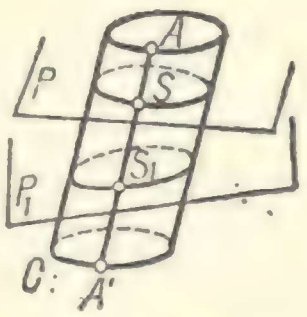


Fig. 146

**2. Suprafață conică** (fig. 147) este suprafața născută de o *dreaptă generatoare* $AA'$ care trece printr-un punct fix $V$ *(vîrful)* și se sprijină pe o *curbă directoare* $C$. Vîrful conului împarte suprafața în două părți care se numesc *pînzele* conului. Prin *con* (fig. 165) înțelegem corpul mărginit de o suprafață conică, vîrf

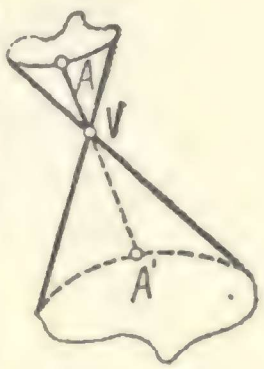


Fig. 147

și o secțiune plană, *baza* conului; distanța vîrfului la bază, se numește *înălțime*. Se numește *trunchi de con* (fig. 166), corpul obținut secționînd un con printr-un plan paralel cu baza, cuprins între vîrf și bază. Un trunchi de con are *două baze*; distanța dintre ele se numește *înălțime*. Dacă baza unui con este un cerc și înălțimea cade în centrul cercului (fig. 167), conul se numește de *rotație*; secționînd un con de rotație printr-un plan paralel cu baza se obține un *trunchi de con de rotație* (fig. 168).

**3. Suprafață de rotație** (fig. 148) este suprafața născută prin rotația unei *curbe generatoare* $C$ în jurul unei axe $\Delta$. Un punct $A$ de pe generatoare, descrie în mișcare un cerc, numit *paralel*, care se află într-un plan perpendicular pe axă și are centrul pe axă. Suprafața poate fi considerată ca născută din mișcarea unui cerc al cărui plan este

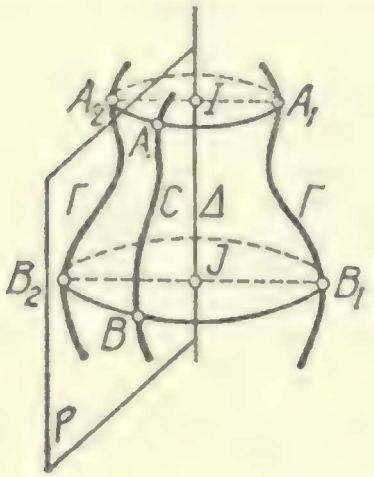



Fig. 148

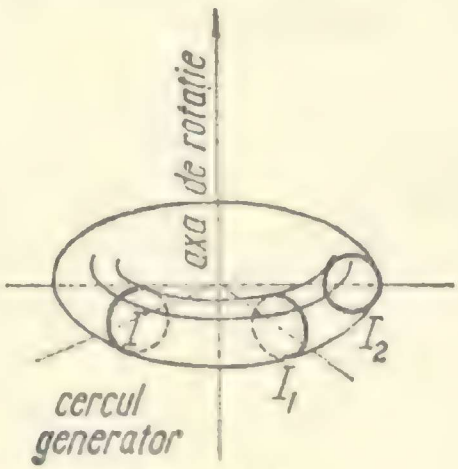



Fig. 149

perpendicular pe axă, al cărui centru descrie axa și se sprijină pe generatoare. Secțiunea unei suprafețe de rotație printr-un semiplan $P$ care trece prin axă (și este mărginit de aceasta) este o curbă care se numește *curbă meridiană*. În particular *cilindrul* și *conul de rotație* sînt suprafețe născute din rotația unei drepte paralele sau concurente cu axa. Un cerc care se rotește în jurul unui diametru dă naștere unei sfere; dacă axa nu trece prin centrul cercului, suprafața născută se numește *tor* (fig. 149).

**4. Sfera** este locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix $O$ numit *centru*; distanța de la un punct $M$ al suprafeței la centru, se numește *rază* (fig. 169). Planul perpendicular în $M$ pe $OM$ se numește *plan tangent* la suprafață. Sfera împarte spațiul în trei regiuni: *puncte interioare, exterioare și punctele suprafeței.* O dreaptă poate fi *secantă* (cînd are două puncte comune cu sfera), *exterioară* (n-are nici un punct comun cu sfera), *tangentă* (are două puncte confundate cu sfera). Tangenta într-un punct $M$ *(punctul de contact)* se află în planul tangent în acest punct la suprafață. Dintr-un punct $M$ exterior unei sfere (fig. 150) se pot duce o infinitate de tangente la o sferă care for-

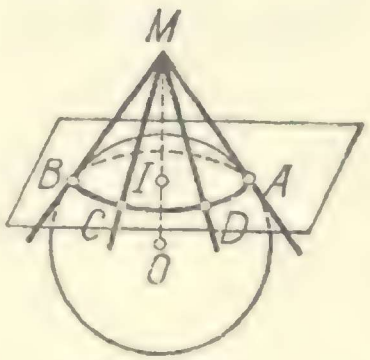


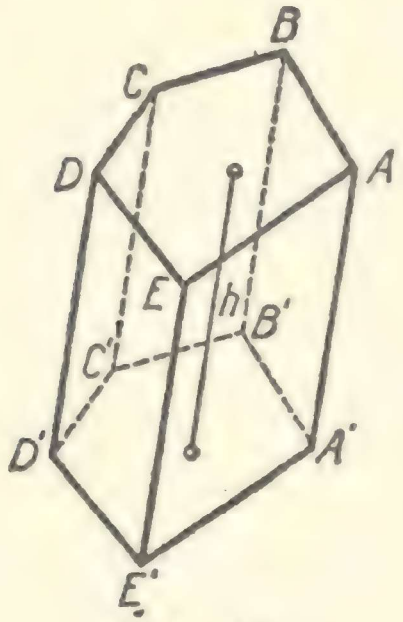
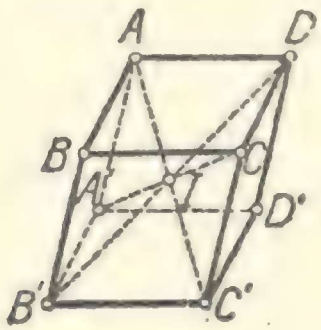
Fig. 150

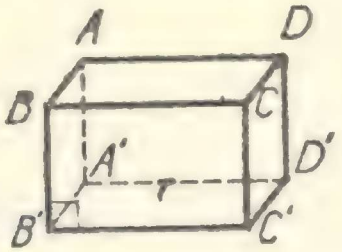
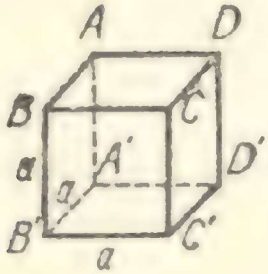
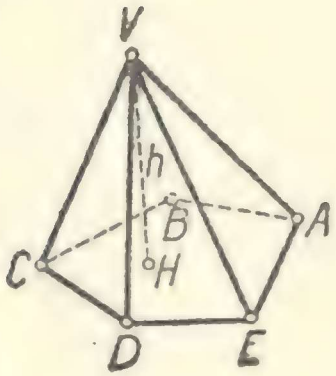
mează un con de rotație circumscris sferei. O dreaptă care taie o sferă, determină o *coardă* în ea care va fi cea mai mare cînd secanta trece prin centru și cînd se numește *diametru*. Un plan care taie o sferă, o taie după un cerc al cărui centru este piciorul perpendicularei coborîtă din centrul sferei pe planul secant. Acest cerc se numește *cerc mare* cînd planul secant trece prin centrul sferei.

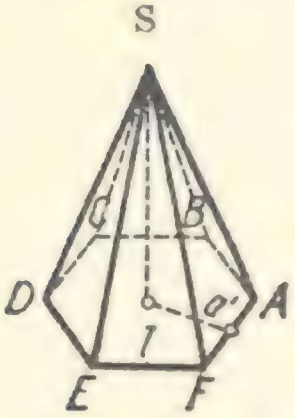
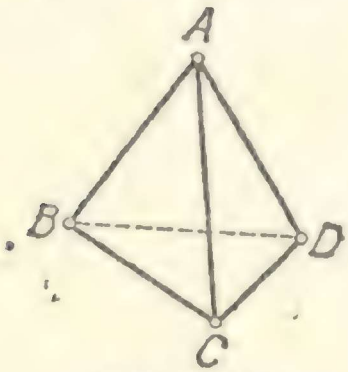
Patru puncte în spațiu, care nu sînt coplanare, determină o sferă care este circumscrisă tetraedrului format de punctele date.

## § 5.4. Arii și volume

*Notații:* $V$ = volumul corpului; $A_l$ = aria laterală; $A_t$ = aria totală; $A_b$ = aria bazei; $S$ = = aria secțiunii drepte; $h$ = înălțimea; $a$ = apotema fețelor laterale; $g$ = generatoarea.

| Corpul | Formula |
|---|---|
| *Prisma* | |
|  Fig. 151 | $V = A_b h.$ |
| *Prisma dreaptă* | |
|  Fig. 152 | $V = A_b h$; $A_l = ph$; $A_t = ph + 2A_b$ |

| Corpul | Formula |
|---|---|
| *Paralelipiped dreptunghic* ($a$, $b$, $c$ muchiile care se întîlnesc într-un vîrf) | |
|  Fig. 153 | $V = abc;$ $A_l = 2(ab + bc + ca)$ |
| *Cubul* cu latura $a$ | |
|  Fig. 154 | $V = a^3;\ A_l = 6a^3$ |
| *Piramida* | |
|  Fig. 155 | $V = \frac{1}{3} A_b h$ |

| Corpul | Formula |
|---|---|
| *Piramida regulată* ($l$ latura bazei, $n$ numărul laturilor bazei, $a'$ apotema bazei) | $V_3 = \frac{1}{6} pa'h;$ |
|   Fig. 156 | $A_l = \frac{1}{2} nl\,(a + a')$ |
| | $A_l = \frac{1}{2} nla$ |
| *Tetraedru* cu latura $l$ | |
|   Fig. 157 | $V = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3,$ |
| | $A_l = \sqrt{3} l^2$ |

| Corpul | Formula |
|---|---|
| *Trunchi de prismă triunghiulară* ($a$, $b$, $c$ muchiile paralele) | $V = \frac{1}{3}(a + b + c)S$ |
| Fig. 158 | |
| *Trunchi de prismă patrulateră* | $V = \frac{1}{6}h\,[b\,(2a + a') + b'(2a' + a)]$ |
| Fig. 159 | |
| *Pana* | $V = \frac{1}{6}bh\,(2a + a_1)$ |
| Fig. 160 | |

| Corpul | Formula |
|---|---|
| *Trunchi de piramidă* ($B$, $B'$ ariile bazelor) | $V = \frac{1}{3} h(B + B' + \sqrt{BB'})$ |

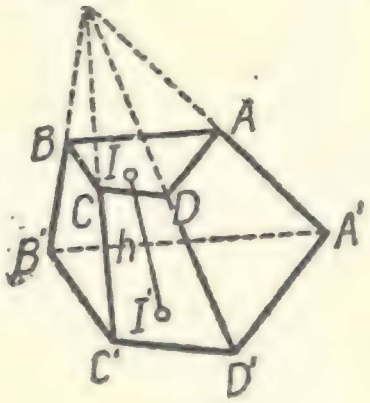



Fig. 161

***Cilindrul***

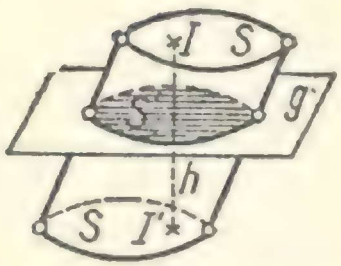



Fig. 162

| | |
|---|---|
| | $V = A_b h$ |
| *Cilindrul de rotaţie* ($R$ raza bazei) | |

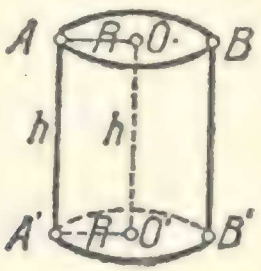
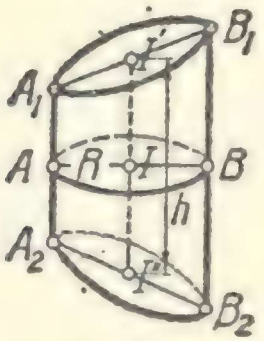
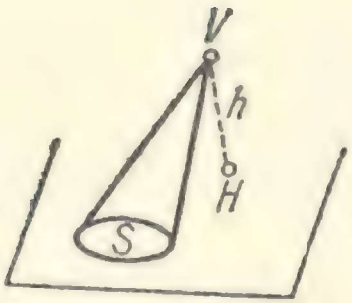
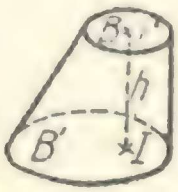
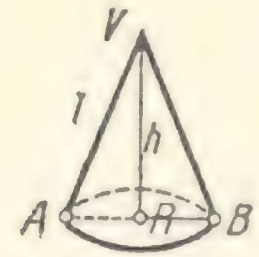
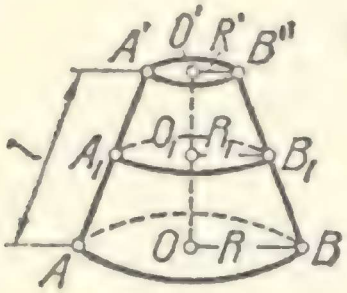
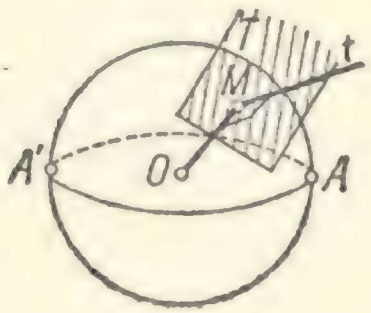
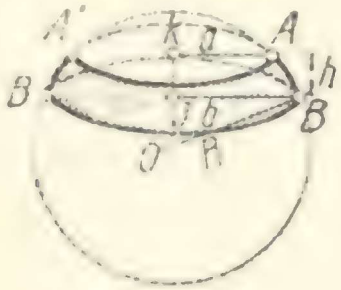
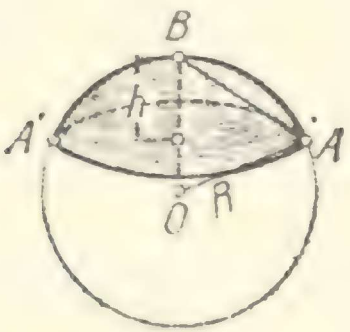


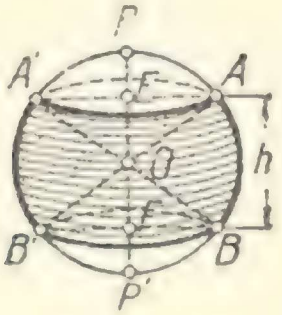
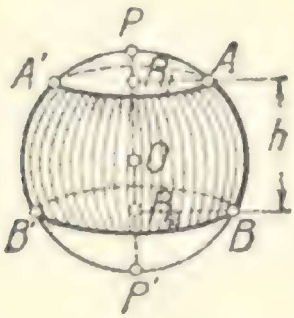

Fig. 163

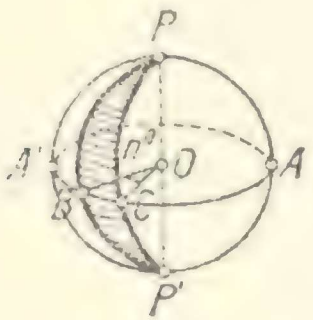
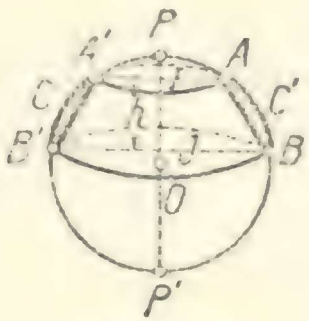
$$V = \pi R^2 h,$$
$$A_l = 2\pi R h,$$
$$A_t = 2\pi R (h + R)$$

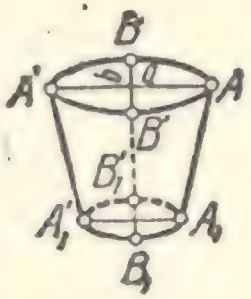
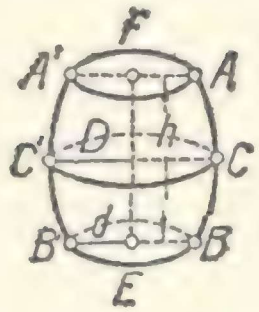
| Corpul | Formula |
|---|---|
| *Trunchi de cilindru de rotaţie* ($R$ raza secţiunii drepte) | |
|   Fig. 164 | $V = \pi R^2 h$ <br> $A_l = 2\pi R h.$ |
| *Conul* | |
|   Fig. 165 | $V = \frac{1}{3} A_b h$ |
| Trunchi de con ($B$, $B'$ suprafeţele bazelor) | |
|   Fig. 166 | $V = \frac{1}{3} h(B + B' + \sqrt{BB'})$ |

| Corpul | Formula |
|---|---|
| *Conul de rotaţie* ($R$ raza bazei) | $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$ |
|   Fig. 167 | $A_l = \pi R g,$ $A_t = \pi R (R + g)$ |
| *Trunchi de con de rotaţie* ($R$, $R'$ razele celor două baze) | $V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 +$ $+ R'^2 + RR').$ |
|   Fig. 168 | $A_l = \pi g (R + R').$ $A_t = \pi [R(g + R) +$ $+ R' (g + R')].$ |
| *Sfera* de rază $R$ | $V = \frac{4}{3}\pi R^3,$ |
|   Fig. 169 | $A_l = 4\pi R^2.$ |

| Corpul | Formula |
|---|---|
| *Zona sferică*<br>  <br><br>Fig. 170 | $V = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2).$<br>$A_l = 2\pi Rh,\ A_t = \pi(2Rh + a^2 + b^2).$ |
| *calotă sferică*<br>  <br><br>Fig. 171 | $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h),$<br>$A_l = \pi AB^2.$<br>$A_t = \pi(2AB^2 - h^2).$ |

| Corpul | Formula |
|---|---|
| *Sector sferic* descris de sectorul $AOB$ în rotaţie în jurul lui $PP'$. | |
|  <br>Fig. 172 | $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ |
| *Segment sferic* | |
|  <br>Fig. 173 | $V = \frac{1}{6}\pi h\,[h^2 + 3(R_1^2 + R_2^2)]$ |

| Corpul | Formula |
|---|---|
| *Fus sferic* adică aria $PBP'CP$ ($BOC = n^\circ$ sau $n^r$) | $V = \frac{R^3 n^\circ}{270} = \frac{2}{3} R^3 n^r.$ |
|  Fig. 174 | $A_l = \frac{\pi R^2 n^\circ}{90} = 2R^2 n^r.$ |
| *Inel sferic* născut din rotația segmentului circular în jurul lui $PP'$ | |
|  Fig. 175 | $V = \frac{1}{6} \pi A B^2 h.$ |

| Corpul | Formula |
|---|---|
| *Găleata*   Fig. 176 | $V = \frac{1}{6}\pi h\,[2\,(ab + a_1b_1) + (ab_1 + a_1b)]$ |
| *oiul*   Fig. 177 | $V \sim \frac{\pi h}{15}\left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}\,d^2\right)$ |

## § 5.5. Transformări geometrice

**1. Simetria** poate fi de trei feluri:

a) *Față de un punct O (centrul* de simetrie), simetricul unui punct $M$ este un punct $M'$ astfel ca punctele $M$, $O$, $M'$ să fie coliniare și $OM = OM'$ (fig. 178).

b) *Față* de o axă $\Delta$ (axa de simetrie), simetricul unui punct $M'$ astfel ca $MM'$ să fie perpendiculară pe $\Delta$ și $MI = IM'$ (fig. 179).

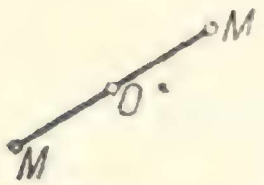


Fig. 178

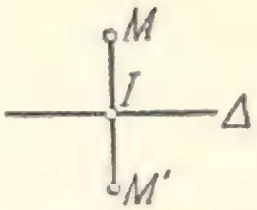


Fig. 179

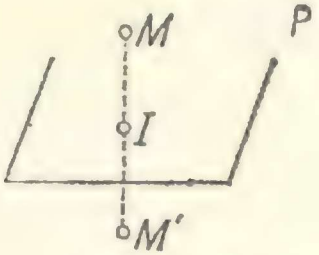


Fig. 180

c) *Față de un plan P* (*planul* de simetrie) simetricul unui punct $M$ este un punct $M'$ astfel ca $MM'$ să fie perpendiculară pe $P$ și $MI = IM'$ (fig. 180). Oricare ar fi această simetrie, simetricul simetricului este punctul inițial. Pentru acest motiv, punctele $M$, $M'$ se numesc *simetrice* față de un punct, o axă sau un plan. Două figuri se zic că sînt *simetrice* față de un punct, o axă sau un plan, dacă între punctele lor se poate stabili o corespondență biunivocă astfel ca punctele corespunzătoare să fie simetrice în raport cu un punct, o axă sau un plan. De asemenea se zice că un punct o axă sau un plan este un *element* de simetrie al unei figuri dacă punctele ei sînt simetrice două cîte două față de un asemenea element.

Două figuri simetrice față de un punct sînt direct egale, iar două figuri simetrice față de o axă sau față de un plan, sînt invers egale.

**2. Translația.** Considerăm în spațiu o figură $F$ formată din punctele $A$, $B$, $C$, ... (fig. 181). Dacă prin diferitele puncte ale figurii $F$ ducem segmente paralele, egale și de același sens, punctele transformate $A'$, $B'$, $C'$, ... formează o figură $F'$ care

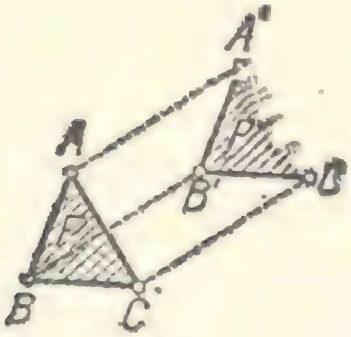



Fig. 181

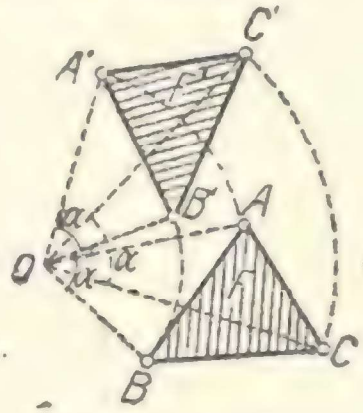



Fig. 182

se spune că se deduce din $F$ printr-o *translație* de vector $\mathbf{a} = \overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \ldots$

Figurile $F$, $F'$ sînt direct egale.

**3. Rotația.**

a) Dacă $A$, $B$, $C$, ..., punctele unei figuri plane $F$ descriu arce egale de mărime $\alpha$ în același sens și cu același centru $O$ din planul figurii $F$ (fig. 182) pînă în pozițiile $A'$, $B'$, $C'$... care formează figura $F'$, vom spune că $F'$ se deduce din $F$ printr-o *rotație de centru $O$ și de amplitudine $\alpha$*. Figura $F$ se poate deduce din $F'$ printr-o rotație de același centru și de amplitudine $-\alpha$. Simetria față de un punct $O$ este o rotație de 180° față de $O$. Rotația unui cerc în jurul centrului său, este el însuși.

b) Rotația unei figuri în jurul unei axe în spațiu se face după explicația dată la § 5.3.3, oprindu-ne după descrierea unghiului $\alpha$.

Două figuri $F$, $F'$ rotite într-unul din modurile de mai sus sînt direct egale.

**4. Omotetia.** Dacă unim punctele $A$, $B$, $C$, ... ale unei figuri $F$ (fig. 183) cu un punct $O$ din spațiu și pe dreptele $OA$, $OB$, $OC$, ... luăm punctele $A'$, $B'$, $C'$, ... astfel ca

$$(270) \qquad \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \ldots = k,$$

figura $F'$ formată de aceste puncte se zice că este *omotetica* lui $F$ în raport cu *centrul* $O$ și cu *raportul* $k$ *de omotetie*.

Figurile $F$, $F'$ transformate prin omotetie sînt asemenea.

Construcția geometrică este dată în § 4.7.6.

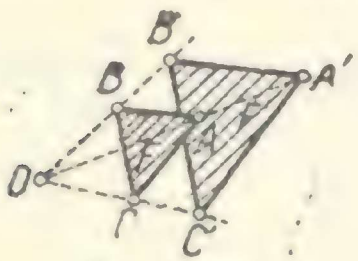



Fig. 183

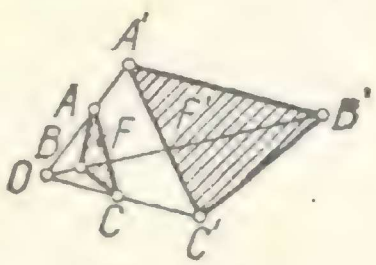



Fig. 184

**5. Inversiunea.** Dacă procedăm ca la omotetie, dar în loc de (270) luăm

$$(271) \quad \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'} = \ldots = k,$$

vom spune că figurile $F$, $F'$ sînt *transformate prin inversiune*, sau că figura $F'$ este *inversa* figurii $F$ (fig. 184). $O$ se numește *polul inversiunii* iar $k$ *puterea de inversiune*. Construcția geometrică este dată în § 4.7.15.

**6.** Simetria, translația și rotația sînt *transformări* care păstrează lungimile. O succesiune de asemenea transformări, se zice că definesc o *deplasare*.

Simetria, translația, rotația, omotetia și inversiunea sînt transformări care păstrează unghiurile. O succesiune de asemenea transformări se zice că definesc o *transformare conformă*.

Mulțimea formată din dreptele și cercurile planului este transformată în ea însăși printr-o transformare conformă.

# 6. GEOMETRIA ANALITICĂ PLANĂ

## § 6.1. Elemente de calcul vectorial

**1. Vectori.** Un *vector* este caracterizat prin *mărime* (sau *normă*), *direcţie* şi *sens*; poate fi reprezentat printr-un *segment* orientat (fig. 185). În această reprezentare vom numi: *A originea*, *B extremitatea*, $\Delta$ *suportul*; $AB = |\mathbf{a}|$ reprezintă mărimea vectorului, $\Delta$ dă direcţia vectorului iar sensul de la $A$ la $B$ reprezintă sensul vectorului. Dacă:

a) $A$ este fix pe $\Delta$, se zice că vectorul este *localizat*.

b) $A$ oriunde pe $\Delta$, vectorul este *alunecător*.

c) $A$ oriunde în spaţiu, vectorul este *liber*. În geometria analitică se folosesc vectorii liberi. Cînd lucrăm cu vectori, vom numi numerele reale *scalari*.

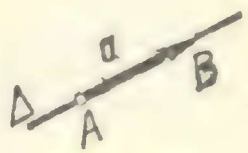


Fig. 185

Se numeşte *vector nul*, un vector a cărui lungime este nulă; vectorul nul are direcţia şi sensul nedeterminate.

Vectorul $m\mathbf{a}$, unde $m$ este un *scalar*, se zice că este *coliniar* cu $\mathbf{a}$: are mărimea $|m\mathbf{a}|$, acelaşi sens cu $\mathbf{a}$ dacă $m>0$ şi sens contrar dacă $m<0$. În particular, $-\mathbf{a}$ se numeşte *opusul* lui $\mathbf{a}$ (fig. 186).

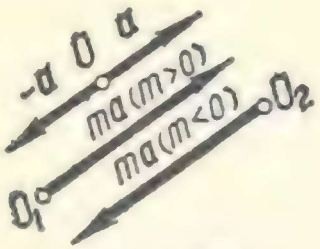



Fig. 186

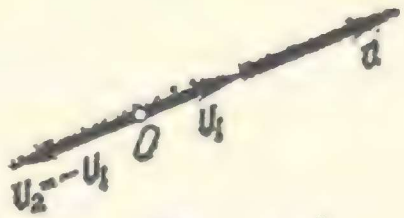



Fig. 187

Doi vectori coliniari au suporturile paralele (sau confundate). Un vector $\mathbf{u}$ pentru care $|\mathbf{u}| = 1$ se numeşte *versor* (sau *vector unitar*); o direcţie are doi versori opuşi (fig. 187). Dacă $\mathbf{u}$ este versorul unui vector $\mathbf{a}$, atunci $\mathbf{a} = a\mathbf{u}$, unde $a$ este valoarea algebrică a vectorului $\mathbf{a}$. Doi vectori care au aceeaşi mărime, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens se zice că sînt *echipolenţi*.

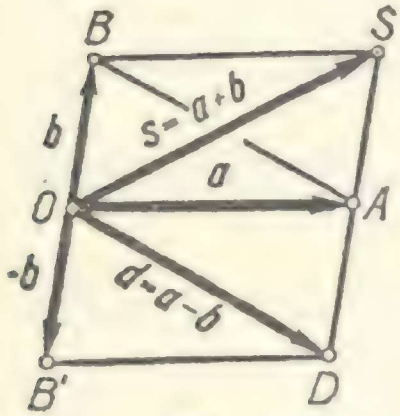



Fig. 188

**2. Adunarea şi scăderea** vectorilor se face după regula paralelogramului analog ca la numere complexe (§ 3.4.2 b) (fig. 188). Dacă pe două axe $Ox$, $Oy$ luăm cîte un versor $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, atunci orice

vector din plan se va *descompune* după formula (fig. 189)

(272) $$\boxed{\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}}$$

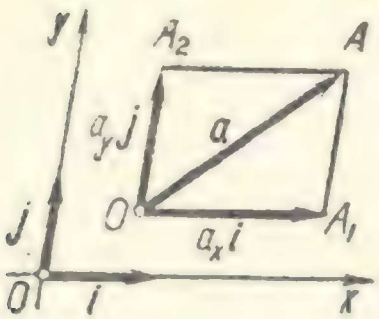



Fig. 189

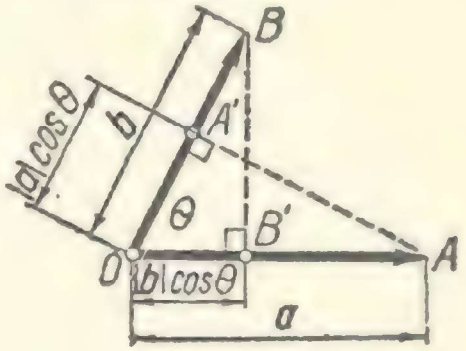



Fig. 190

unde $a$ , $a_y$ sînt doi scalari, $a\,\mathbf{i}$ și $a_y\mathbf{j}$ se numesc *componentele* lui $\mathbf{a}$ de-a lungul celor două axe. În particular, vectorul ce unește un punct $M(x, y)$ cu originea axelor, se numește *vector de poziție* al punctului $M$ și are ca expresie

(273) $$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

3. **Produs scalar** a doi vectori se definește prin una din formulele (fig. 190)

(274) $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\,\overline{OB'} = |\mathbf{b}|\,\overline{OA'}.$$

În particular

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^3, \tag{274'}$$

și în special

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1, \quad \mathbf{ij} = \cos\,(Ox,\ Oy). \tag{274''}$$

Avem

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}, \quad (m\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}\,(m\mathbf{b}) = m(\mathbf{ab}),\\ \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\,\mathbf{c},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y.\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \text{ dacă și numai dacă } \mathbf{a},\ \mathbf{b} \text{ sînt perpendiculari (în ipoteza că nici unul din vectori nu este nul)}\end{array}} \tag{275}$$

În particular, dacă axele sînt perpendiculare,

$$\boxed{\mathbf{ij} = 0,\ \cos\,(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2}},} \tag{276}$$

unde $b_x$, $b_y$ sînt definiți printr-o formulă analogă cu (273).

**4. Produsul vectorial** (fig. 191) a doi vectori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ este tot un vector $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ care se bucură de proprietăţile:

a) $\mathbf{c}$ este perpendicular pe planul definit de suporturile vectorilor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ şi astfel ca un om cu picioarele pe planul $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ să aibă pe $\mathbf{a}$ la dreapta şi pe $\mathbf{b}$ la stînga;

b) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, adică $|\mathbf{c}|$ reprezintă aria paralelogramului construit pe $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ ca laturi. Avem proprietăţile:

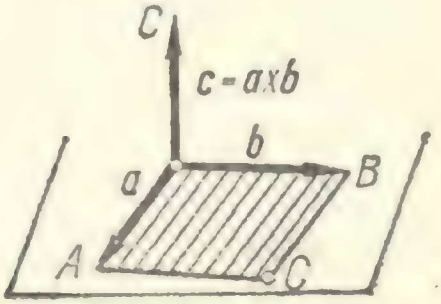


Fig. 191

(277)
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a},$$
$$(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ dacă şi numai dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sînt coliniari (presupunînd că nici unul din vectori nu este nul)

**5. Spaţiu vectorial.** Fie $L$ un modul (§ 2.1.4) ale cărui elemente $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... le numim *vectori* şi un corp $K$ (§ 2.1.6) ale cărui elemente $m$, $n$, $p$, ..., le numim *scalari*. Vom spune că $L$ formează

un *spațiu vectorial* dacă pentru oricare $m \in K$, $\mathbf{a} \in L$, $m\mathbf{a} \in L$, operația $m\mathbf{a}$ satisfăcînd axiomele

$$(278)\quad m(n\mathbf{a}) = (mn)\mathbf{a},\quad m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b},$$
$$(m + n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a},\quad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a},$$

unde 1 reprezintă elementul unitate din $K$.

## § 6.2. Geometria analitică a dreptei

Fiind dată o dreaptă, o transformăm într-o axă luînd pe ea o origine $O$, o unitate de măsură $OV$ și un sens pozitiv de la $O$ spre $V$ (fig. 192). Dacă notăm cu $x$ abscisa unui punct pe dreaptă, atunci avem

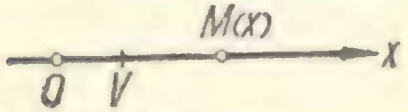


Fig. 192

*T. 18.*

| Date | Formule |
|---|---|
| Punctele $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ | $M_1M_2 = \lvert x_2 - x_1 \rvert$; $\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1$ |
| Punctul $M$ definit pe segmentul $M_1M_2$ prin $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -k$. | $x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}$ |

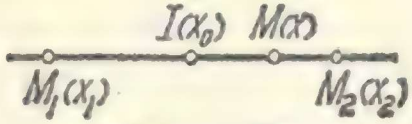


Fig. 193

| Date | Formula |
|---|---|
| Mijlocul segmentului $I(x_0)$ | $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ |
| Biraportul a patru puncte $M_i(x_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ este expresia $\frac{\overline{M_3M_1}}{\overline{M_3M_2}} : \frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_4M_2}} = (M_1M_2M_3M_4) = R$ | $R = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{u - w}{v - w}$ unde $u = x_1x_2 + x_3x_4$, $v = x_1x_3 + x_2x_4$, $w = x_1x_4 + x_2x_3$. |
| Biraportul se numește *armonic* atunci cînd $R = -1$. | $2(x_1x_2 + x_3x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$ |

## § 6.3. Dreapta în plan

**1.** Raportăm planul la două axe $Ox$, $Oy$ care fac între ele un unghi oarecare $\theta$ (fig. 194). După poziția lui $M(x, y)$, coordonatele vor avea semnele sau valorile

| $M$ | I | II | III | IV | $Ox$ | $Oy$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | + | − | − | + | ± | 0 |
| $y$ | + | + | − | − | 0 | ± |

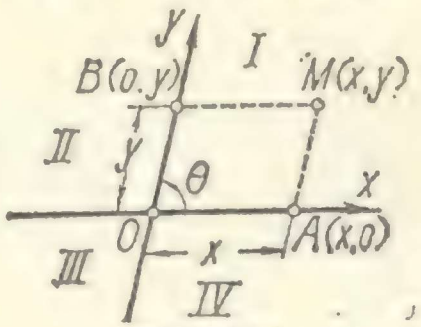
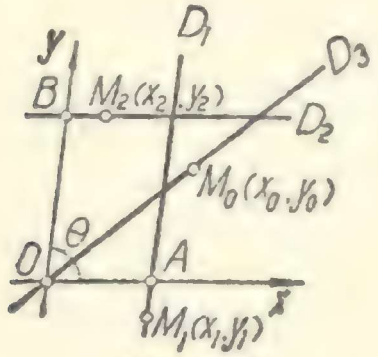
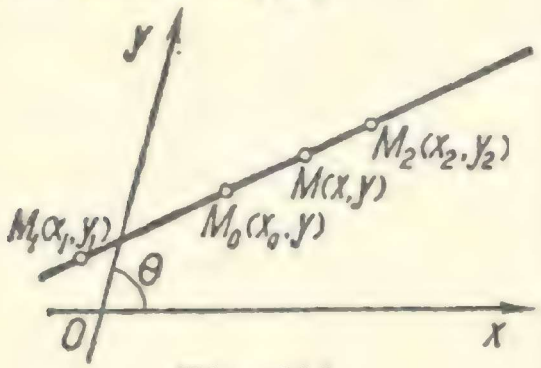
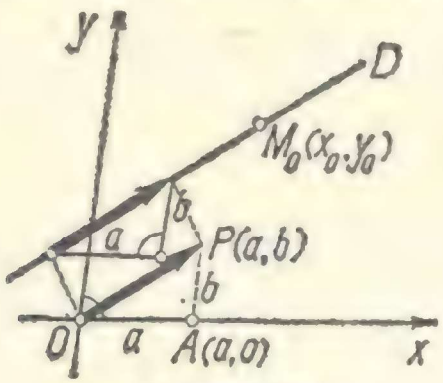


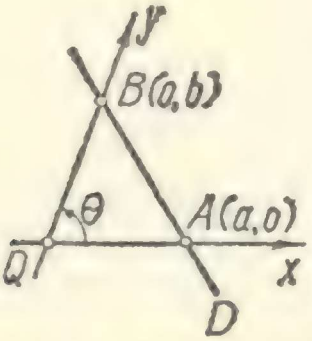
Fig. 194

2. Avem formulele

*T. 19.*

| Date | Formule |
|---|---|
| Drepte aşezate particular faţă de axele de coordonate   Fig. 195 | $x = a$ reprezintă o dreaptă paralelă cu $Oy$; dacă îi cunoaştem un punct $M_1(x_1, y_1)$, ecuaţia ei va fi $x = x_1$; $y = b$ reprezintă o dreaptă paralelă cu $Ox$; dacă îi cunoaştem un punct $M_2(x_2, y_2)$, ecuaţia ei va fi $y = y_2$; $y = mx$ (sau $ax + by = 0$) reprezintă o dreaptă care trece prin $O$; dacă trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$, ecuaţia ei va fi $y = (y_0/x_0)x$. |
| Ecuaţiile *parametrice* ale dreptei cînd cunoaştem; $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -k$; | $x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}$, $y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$ |

| Date | Formule |
|---|---|
| $M_0(x_0, y_0)$ mijlocul segmentului $M_1M_2$ | $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$. |
|   Fig. 196 | |
| Ecuaţiile *parametrice* ale dreptei cînd cunoaştem un punct $M_1(x_1, y_1)$ şi direcţia dreptei definită prin vectorul $\overline{OP}$, $P(a, b)$. | $x = x_1 + \lambda a$, $y = y_1 + \lambda b$, $\lambda \in R$, este un *parametru* care determină poziţia lui $M(x, y)$ pe dreaptă. |
|   Fig. 197 | |

| Date | Formule |
|---|---|
| Ecuația *carteziană* a unei drepte cînd îi cunoaștem două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. | $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$; $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ |
| Ecuația dreptei definită prin *tăieturi* $A(a, 0)$, $B(0, b)$. | $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$ |
|   Fig. 198 | |
| Ecuația dreptei definită printr-un punct $M_1(x_1, y_1)$ și *coeficientul unghiular* $m = b/a$. | $y - y_1 = m(x - x_1)$. |
| *Ecuația generală* a dreptei | $Ax + By + C = 0$; dacă $B \neq 0$ se poate scrie $y = mx + n$ $(m = -A/B)$. |

| Date | Formule |
|---|---|
| Ecuația unei drepte paralelă cu dreapta $D \equiv Ax + By + C = 0$ | $D + \lambda = 0$, $\lambda \in R$, parametru care identifică dreapta. |
| Fascicul de drepte definit prin dreptele $D_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = 0$ $(i = 1, 2)$ | $D_1 + \lambda D_2 = 0$, $\lambda \in R$, parametru care identifică dreapta în fascicul. |
| Condiția ca trei puncte $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ să fie *coliniare* | $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ |
| Condiția ca trei drepte $D_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ să fie *concurente* | $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0,$ sau $\lambda D_1 + \mu D_2 + \nu D_3 = 0.$ |

**3.** O dreaptă, definită prin ecuația generală împarte planul în trei regiuni după cum $Ax + By + C \gtreqless 0$. Pentru a determina regiunile este suficient să determinăm semnul primei părți pentru un punct particular al planului.

**4.** Două drepte sînt paralele dacă şi numai dacă au acelaşi coeficient unghiular, adică $m = m'$, iar dacă este scrisă sub forma generală, $A/B = A'/B'$.

Două drepte $D_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = 0$ $(i = 1, 2)$ sînt confundate dacă şi numai dacă

$$(279) \qquad D_1 \equiv \lambda D_2 \quad \text{sau} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

*Observaţie.* Toate formulele precedente sînt independente de unghiul $\theta$ al axelor de coordonate.

**5.** a) Dacă într-o problemă se cere să se arate că o anumită dreaptă, care depinde de un parametru (şi care formează o *familie* de drepte) rămîne paralelă cu o direcţie dată, va trebui să se arate că coeficientul unghiular al dreptei nu depinde de acest parametru.

b) În aceeaşi ordine de idei, dacă se cere să se arate că o dreaptă variabilă trece printr-un punct fix, va trebui să arătăm că ecuaţia ei este de forma $D_1 + \lambda D_2 = 0$, iar punctul fix se va găsi la intersecţia dreptelor $D_1 = 0$, $D_2 = 0$.

**6.** Toate formulele ce urmează scrise într-un sistem de axe oarecare, depind de $\theta$; de aceea, pentru simplitate, vom lua axele *perpendiculare*, adică $\theta = 90°$.

| Date | Formule |
|---|---|
| Distanţa între două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ | $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. |

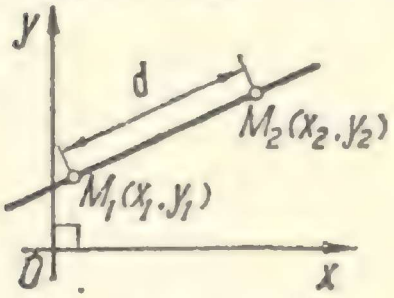



Fig. 199

| | |
|---|---|
| Reprezentarea parametrică a dreptei cînd cunoaştem un punct $M_1(x_1, y_1)$ şi unghiul $\alpha$ pe care-l face cu direcţia pozitivă a axei $Ox$ | $x = x_1 + \rho \cos \alpha,$<br>$y = y_1 + \rho \sin \alpha$<br>unde<br>$\rho = \overline{M_1M}.$ |

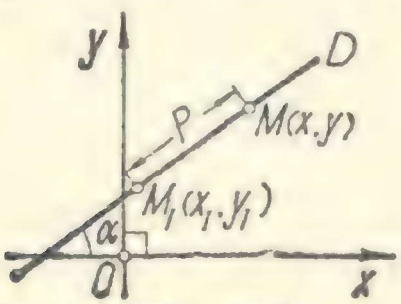
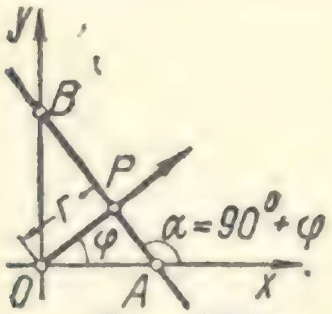



Fig. 200

| Date | Formule |
|---|---|
| Coeficientul unghiular ($\alpha$ definit la cazul precedent) | $m = \operatorname{tg} \alpha$ |
| Ecuaţia normală a dreptei | $x \cos \varphi + y \sin \varphi - r = 0.$ |
|  Fig. 201 | |
| Unghiul ascuţit a două drepte avînd coeficienţii unghiulari $m_1$, $m_2$. | $\operatorname{tg} V = \left\| \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right\|,$ $\cos V = \dfrac{\lvert 1 + m_1 m_2 \rvert}{\sqrt{(1 + m_1^2)(1 + m_2^2)}}.$ |
| Condiţia ca două drepte să fie perpendiculare | $m_1 m_2 + 1 = 0$ (sau $m_2 = -1/m_1$) dacă dreptele sînt definite prin coeficienţii unghiulari; $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$, dacă dreptele sînt definite prin ecuaţia $Ax + By + C = 0.$ |

| Date | Formule |
|---|---|
| Distanța $d_0$ a unui punct $M_0(x_0, y_0)$ la o dreaptă | $d_0 = \lvert x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - r \rvert$ dacă dreapta este definită prin ecuația normală și $d_0 = \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, dacă dreapta este definită prin $Ax + By + C = 0$. |
| Aria triunghiului format de punctele $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ | $S = \pm\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. |

7. Formulele

(280) $$x = x_0 + x' \cos\theta - y' \sin\theta,$$
$$y = y_0 + x' \sin\theta + y' \cos\theta,$$

definesc o transformare de coordonate ale căror noi axe $O'x'y'$ se obțin din cele vechi prin translația originii în punctul $O'$ $(x_0, y_0)$ și o rotație de unghi $\theta$ (fig. 202).

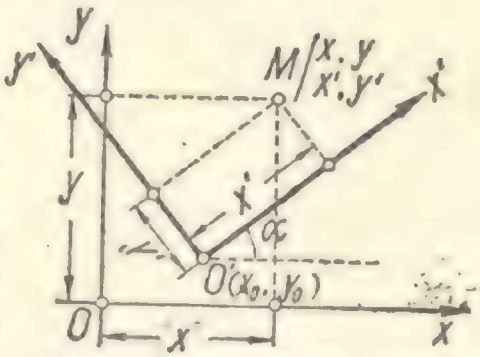



Fig. 202

**8. Locuri geometrice.**

a) Dacă locul geometric este definit printr-o relaţie metrică, atunci ecuaţia locului se obţine traducînd această relaţie prin formulele de mai sus (şi prin cele ce vor urma), într-o ecuaţie de forma $f(x, y) = 0$, care va fi ecuaţia locului.

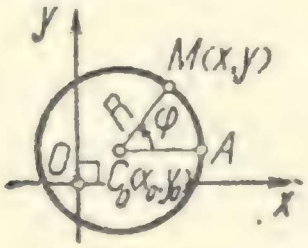
b) Dacă locul este definit prin intersecţia a două familii de curbe, care depind de un parametru, atunci ecuaţia locului se va obţine eliminînd parametrul între ecuaţiile lor. În particular, dacă din ecuaţiile celor două familii de curbe se poate obţine, prin combinaţii, o nouă ecuaţie care să nu depindă de parametru, aceasta va fi ecuaţia locului.

De exemplu, ecuaţiile bisectoarelor a două drepte care se intersectează $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, sînt

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

## § 6.4. Cercul

1. În toate formulele ce urmează, *axele sînt considerate perpendiculare.*

| Date | Formule |
|---|---|
| Ecuaţia cercului cu centrul în punctul $C_0(x_0, y_0)$ şi de rază $R$. | $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ |
|   Fig. 203 | |
| Ecuaţia cercului cu centrul în origine şi de rază $R$ | $x^2 + y^2 = R^2$ |
| Ecuaţia unui semicerc cu centrul în origine, de rază $R$, situat deasupra axei $Ox$ | $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ |
| Cercul care are segmentul $M_1M_2$, $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2)$ ca diametru | $(x - x_1)(x - x_2) + (y-y_1)(y - y_2)=0.$ |
| Ecuaţia generală a unui cerc | $\delta(x^2 + y^2) + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$; $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ se numeşte ecua- |

| Date | Formule |
|---|---|
| | ția *normală* a cercului. Coordonatele centrului sînt $(-a, -b)$ și raza $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ |
| Reprezentarea *parametrică* a cercului cu centrul în punctul $C(x_0, y_0)$ și de rază $R$ | $x = x_0 + R \cos \varphi$, $y = y_0 + R \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ |
| Ecuația cercului circumscris triunghiului $M_1M_2M_3$, $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ | $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ |
| Condiția ca patru puncte $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ să fie conciclice | Se obține din ecuația precedentă înlocuind $x = x_4$, $y = y_4$. |
| Puterea punctului $M_0(x_0, y_0)$ (§ 4. 2. 6) față de cercul avînd ecuația normală | $p_{M_0} = x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c$ |
| Axa radicală a două cercuri date prin ecuațiile normale | $2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0$ |

| Date | Formule |
|---|---|
| Condiția ca două cercuri definite prin ecuațiile normale să fie *ortogonale* (§ 4.2.5 a) | $2(a_1a_2 + b_1b_2) = c_1 + c_2.$ |
| Tangenta într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ de pe cercul $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. Prin polara unui punct față de un cerc se înțelege locul punctelor $M'(x', y')$ astfel ca $(M, M', M_1', M_1'') = -1$ (fig. 204). | $x_0x + y_0y + a(x + x_0) + b(y + y_0) + c = 0$ cu condiția $x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c = 0.$ |
| Cînd $M_0$ este exterior cercului, polara este dreapta ce unește punctele de tangență ale tangentelor duse din $M_0$ la cerc. | Dacă această condiție nu are loc, ecuația reprezintă *polara* lui $M_0$ față de cerc |

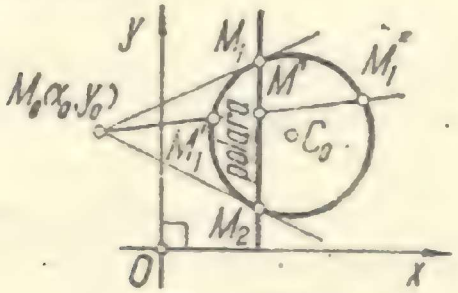
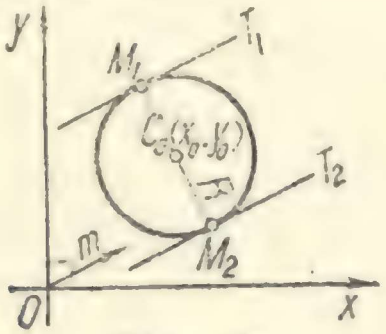


Fig. 204

| Date | Formule |
|---|---|
| Ecuaţia tangentelor paralele cu direcţia de coeficient unghiular $m$ la cercul cu centrul în punctul $C(x_0, y_0)$ şi de rază $R$. | $y - y_0 = m(x - x_0) \pm \pm R\sqrt{1 + m^2}$ |
|   Fig. 205 | |
| Ecuaţiile tangentelor duse din $M_0(x_0, y_0)$ la cercul (fig. 204) | $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-x_0 y_0 \pm R\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - R^2}}{R^2 - x_0^2}$ |

2. Pentru a găsi punctele comune unei drepte cu un cerc, se rezolvă sistemul format de ecuaţiile dreptei şi cercului.

Pentru a găsi punctele comune a două cercuri, se rezolvă sistemul format de ecuaţia unuia din cercuri şi ecuaţia axei lor radicale.

## § 6.5. Conice

În toate formulele ce urmează, axele sînt considerate perpendiculare.

**1. Elipsa** (fig. 206). Fiind date două puncte fixe $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, numite *focare*, locul punctelor din plan pentru care

$$MF + MF' = 2a \tag{281}$$

este o curbă numită *elipsă* a cărei *ecuație canonică* raportată la axele din figură este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (b^2 = a^2 - c^2). \tag{281'}$$

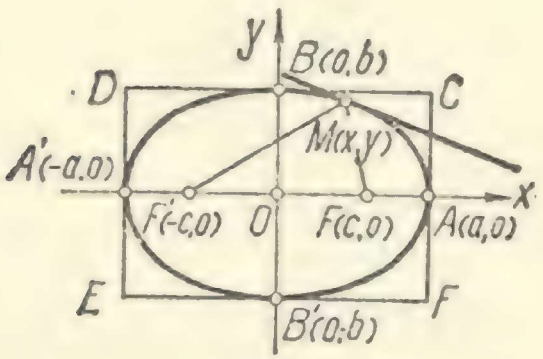



Fig. 206

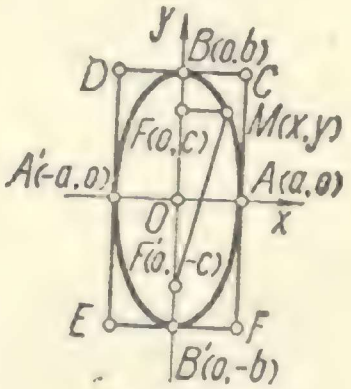



Fig. 207

$FF' = 2c$ = *distanța focală*, $AA' = 2a$ = *axa mare*, $BB' = 2b$ = *axa mică*; $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ *vîrfurile*, $O$ *centrul* curbei, $MF$, $MF'$ *raze vectoare*. Dacă $a<b$, focarele curbei sînt pe $Oy$ și curba are forma din (fig. 207) iar $a^2 = b^2 - c^2$. Dacă $a = b$, elipsa este un cerc.

*Construcția elipsei.*

a) Se consideră o aţă de lungime $2a+2c$ legată la capete (fig. 208); se fixează în $F$ şi $F'$ două ace, se trece aţa după ele şi se întinde cu creionul în $M$ care descrie elipsa *(construcția grădinarului)*.

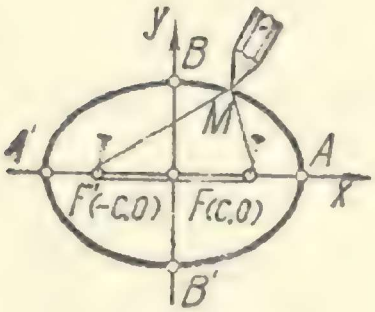



Fig. 208

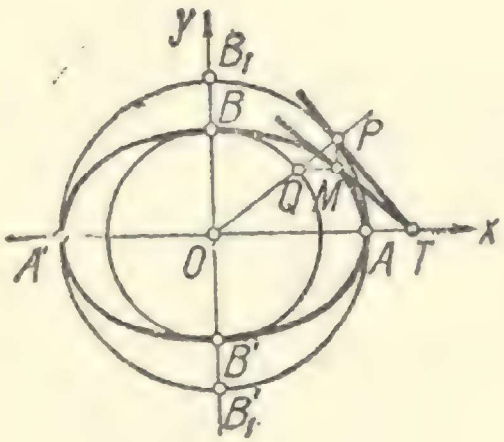



Fig. 209

b) Pe segmentele $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ (fig. 209) ca diametre se construiesc cercuri; prin $O$ se duce o secantă variabilă care le taie în $P$ şi $Q$. Paralela prin $P$ la $Oy$, cu paralela prin $Q$ la $Ox$, se întîlnesc în $M$, ca în cazul în care secanta se roteşte în jurul lui $O$, descrie elipsa de axe $AA'$, $BB'$. Dacă în $P$ ducem tangenta la primul cerc care taie pe $AA'$ în $T$, dreapta $MT$ este tangentă în $M$ la elipsă.

**2. Hiperbola** (fig. 210). Vom folosi aceleaşi numiri şi notaţii ca la elipsă. Hiperbola este definită prin relaţia

$$|MF' - MF| = 2a \tag{282}$$

şi este o curbă a cărei *ecuaţie canonică*, raportată la axele de pe figură, este

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{282'}$$

$$(b^2 = c^2 - a^2)$$

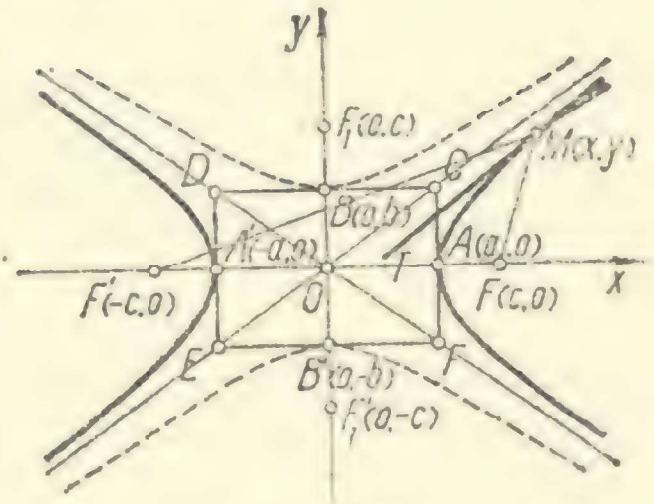



Fig. 210

şi are *două vîrfuri* $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$. Dacă $a = b$, hiperbola se numeşte *echilateră* şi are ecuaţia

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{282''}$$

Hiperbola are două *asimptote* (§ 7.6.13) cu ecuaţiile

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ sau } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0. \tag{283}$$

Curba de ecuaţie

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{282''}$$

reprezintă tot o hiperbolă care se numește *hiperbola conjugată* (282′); are vîrfurile $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ iar focarele $F_1(0, c)$, $F_1'(0, -c)$; este arătată pe figură punctat.

*Construcția hiperbolei* (fig. 211). Pe prelungirea lui $AA'$ se ia un punct $M_0$ și cu deschiderile de compas $A'M_0$, $AM_0$ din $F$ și $F'$ ca centre ce descriu arce care se taie în $M$, $M'$, $M''$, $M'''$ puncte ale hiperbolei cu axa mare $AA'$ și focare $F$, $F'$.

Elipsa și hiperbola au axele de coordonate ca *axe de simetrie*.

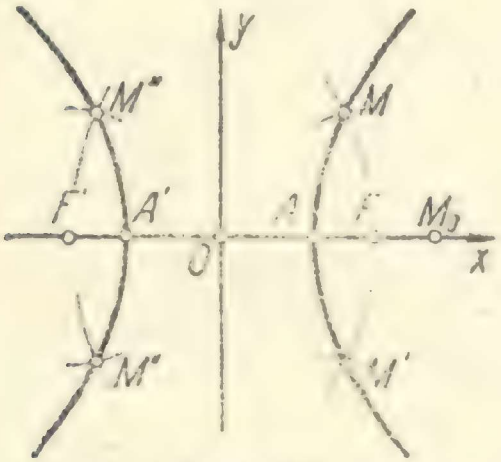



Fig. 211

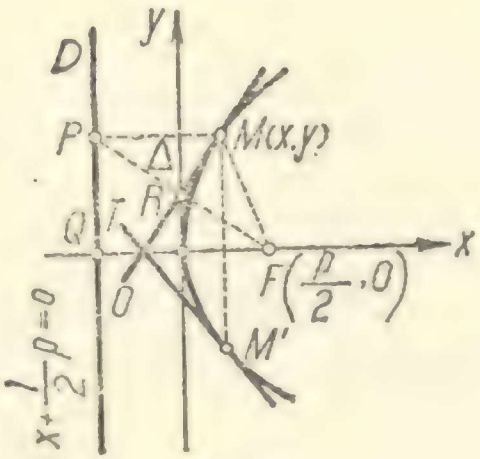



Fig. 212

**3. Parabola (fig. 212).** Fiind dat un punct fix $F$ numit *focar* și o dreaptă fixă $D$ numită *directoare*, locul punctelor egal depărtate de focar și de directoare este o curbă numită *parabolă* a cărei ecuație canonică este

$$y^2 = 2px, \qquad (284)$$

axa $Ox$ fiind perpendiculara coborîtă din $F$ pe $D$ iar $Oy$ paralela la $D$ dusă prin mijlocul segmentului $FQ$; față de aceste axe $F\left(\frac{1}{2}p,\ 0\right)$ iar directoarea are ecuația (284) $x + \frac{1}{2}p = 0$. Parabola are o singură *axă*, care este axă de simetrie pentru curbă și nu are centru; $O$ se numește vîrful parabolei și $Oy$ este tangenta în $O$ la curbă.

*Construcția parabolei.* Prin $F$ se duce o dreaptă arbitrară $\Delta$ care taie pe $D$ în $P$ iar pe $Oy$ în $R$; perpendiculara în $P$ pe $D$ cu perpendiculara în $R$ pe $\Delta$ se taie în $M$, care este un punct al parabolei cu tangenta $MR$.

**4. Proprietățile conicelor.**

a) Cele trei curbe descrise mai sus se numesc *conice* sau *curbe de gr. 2;* afară de ele, o curbă de gr. 2 mai poate fi formată de ansamblul a două drepte a căror ecuație este de forma

$$(Ax + By + C)(A'x + B'y + C') = 0.$$

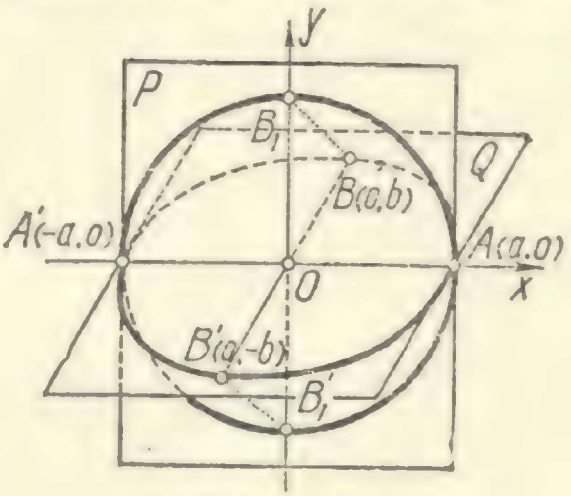


Fig. 213

b) Dacă într-un plan $P$ (fig. 213) considerăm un cerc cu centrul în $O$ și de rază $a$, pe

care-l proiectăm pe un plan $Q$ care face cu primul plan un unghi $\theta$ definit prin relaţia $\cos\theta = b/a$, se obţine o elipsă de axe $2a$. $2b$ construite pe figură.

c) O dreaptă taie o conică în două puncte reale, imaginare sau confundate, după cum este *secantă*, *exterioară* sau *tangentă*; coordonatele lor se obţin rezolvînd sistemul format cu ecuaţiile celor două curbe.

d) *Proprietatea optică* a conicelor. Tangenta într-un punct $M$ al unei elipse este bisectoarea exterioară a razelor vectoare (fig. 206); în cazul hiperbolei este bisectoarea interioară (fig. 210) iar în cazul parabolei este bisectoarea dreptelor $MF$, $MP$ (fig. 212).

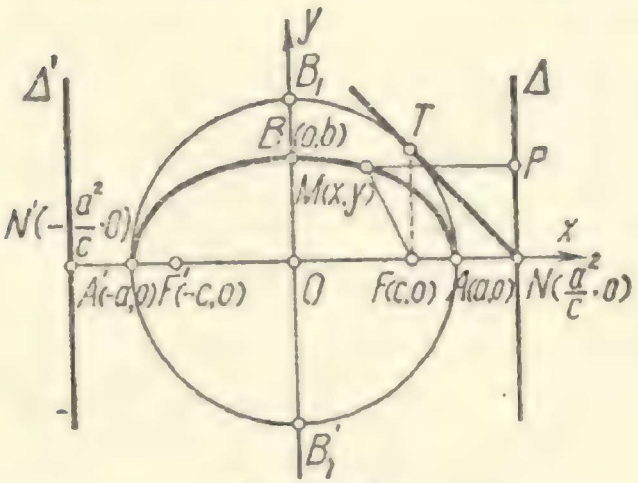


Fig. 214

e) Se numeşte *cerc principal*, cercul de diametru $AA'$ pentru elipsă şi hiperbolă.

f) *Directoarele* elipsei (fig. 214) se obţin prin următoarea construcţie: în $F$ se ridică perpendiculara $FT$ pe $AA'$, în $T$ se duce tangenta la cercul principal care taie pe $AA'$ în $N(a^2/c,\ 0)$. Directoarea $\Delta$ este perpendiculara în $N$ pe $AA'$; o a doua directoare $\Delta'$ este sime-

trica acesteia față de centrul curbei și se referă la focarul $F'$. Pentru hiperbolă, din $F$ se duc tangente la cercul principal (fig. 215) și dreapta care unește punctele de contact, paralelă cu $Oy$, este una din directoarele hiperbolei, avînd aceeași ecuație ca la elipsă; simetrica ei față de $O$ este de asemenea directoare provenită din focarul $F'$.

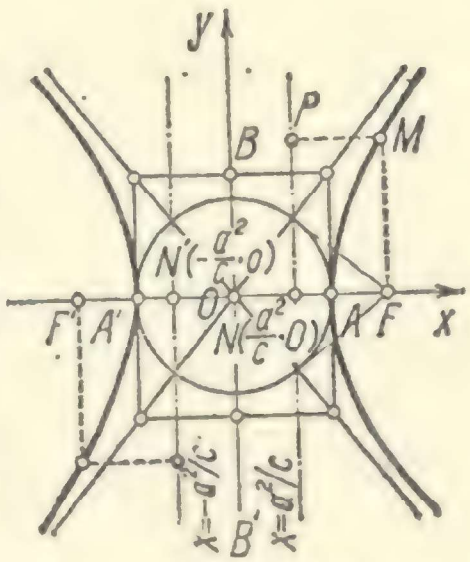


Fig. 215

g) *Excentricitate*. Dacă $M$ este un punct al unei elipse sau al unei hiperbole și dacă coborîm o perpendiculară $MP$ pe una din directoare, vom avea

$$\frac{MF}{MP} = \frac{c}{a} = e, \tag{285}$$

$F$ fiind focarul cu care s-a construit directoarea corespunzătoare. Constanta $e$ se numește *excentricitatea* curbei; dacă curba este elipsă $e<1$, iar dacă este hiperbolă $e>1$ (evident $e = 1$ dacă curba este parabolă).

h) Dacă $M_0(x_0, y_0)$ este un punct al unei conice, atunci ecuația tangentei în acest punct este

$$\frac{x_0x}{a^2} + \varepsilon\frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0; \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0,\ \varepsilon = \pm 1\right). \tag{286}$$

(286′) $y_0 y = p(x + x_0)$ $(y_0^2 = 2px_0)$.

i) *Ecuaţiile tangentelor paralele cu o direcţie dată* sînt

(287) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + \varepsilon b^2}$ ($\varepsilon = 1$ pentru elipsă şi $\varepsilon = -1$ pentru hiperbolă).

(287′) $y = mx + \frac{p}{2m}$ (parabolă).

j) *Tangentele duse dintr-un punct exterior* $M_0(x_0, y_0)$ sînt

(288) $$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-x_0y_0 \pm \sqrt{\varepsilon b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - \varepsilon a^2b^2}}{a^2 - x_0^2}$$

($\varepsilon = 1$ pentru elipsă, $\varepsilon = -1$ pentru hiperbolă).

(288′) $$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4px_0}}{2x_0}$$ (parabolă).

k) Avem *reprezentările parametrice*

(289) $x = a \cos t$; $y = b \sin t$ $(0 \leqslant t < 2\pi)$ (elipsă).

(289′) $$x = a\frac{1 - u^2}{1 + u^2}; \quad y = \frac{2bu}{1 + u^2}$$ $(u \in R)$ (elipsă).

(290) $x = \dfrac{a}{\cos t}$; $y = b \operatorname{tg} t \ (0 \leqslant t < 2\pi)$
(hiperbolă).

(290′) $x = a\dfrac{1+u^2}{1-u^2}$; $y = \dfrac{2bu}{1-u^2}$ $(u \in R)$
(hiperbolă).

(291) $x = \dfrac{u^2}{2p}$; $y = u$ (parabolă).

l) Ecuaţia

(292) $xy = m^2$

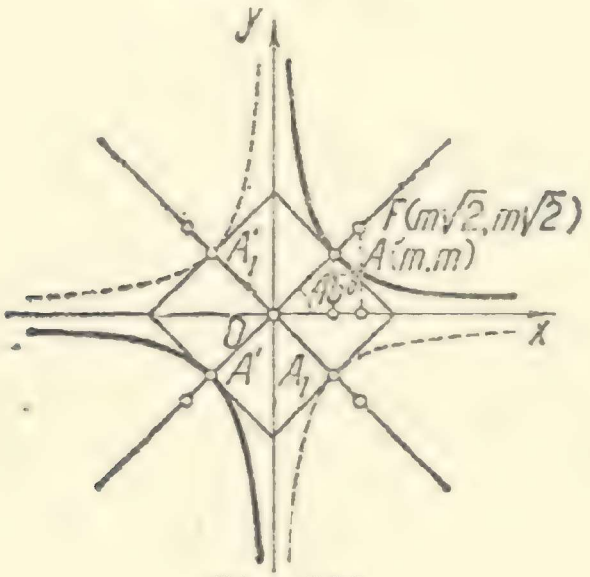


Fig. 216

reprezintă o hiperbolă echilateră raportată la asimptotele sale luate ca axe de coordonate (fig. 216). Axele sînt bisectoarele axelor de coordonat

și are semiaxele egale cu $m\sqrt{2}$ iar distanța focală $2m$. Hiperbola echilateră conjugată este arătată punctat pe figură și are ecuația

$$xy = -m^2. \tag{292'}$$

Dacă $M_0(x_0, y_0)$ se află pe una din curbele (292), (292'), atunci ecuația tangentei în acest punct este

$$y_0 x + x_0 y = 2\varepsilon m^2 \quad (x_0 y_0 = \varepsilon m^2, \quad \varepsilon = \pm 1). \tag{293}$$

# 7. ANALIZĂ MATEMATICĂ

## § 7.1*. Funcții. Șiruri

**1.** Fiind date două mulțimi $X$ și $Y$, se zice că am definit o *funcție (aplicație, operație)* pe $X$ în $Y$, dacă unui element $x \in X$ facem să-i corespundă un element $y \in Y$. Vom nota $y = f(x)$ (sau $f: X \to Y$, sau $X \xrightarrow{f} Y$); $x$ se numește *variabilă* sau *argument*, $y$ *valoarea funcției*, $X$ *mulțimea de definiție*, $Y$ *mulțimea valorilor funcției*. Se spune despre o funcție ... te: a) *surjectivă* dacă $f(X) = Y$ (această notație spune că mulțimea tuturor valorilor $f(x)$ cînd ... $X$ se confundă cu $Y$).

... *injectivă dacă relația* $f(x_1) = f(x_2)$ implică ... $x_2 (\forall x_1, x_2 \in X)$.

... *jectivă* sau *biunivocă* dacă în același timp ... urjectivă și injectivă.

... finiția noțiunii de funcție presupune că la ... valoare $x \in X$, corespunde o *singură* valoare

*) În § 7.1–7.6 se consideră numai șiruri de numere și funcții cu valori reale.

pentru $f(x)$; acest fapt se mai exprimă spunînd că funcţia este *uniformă*.*)

Dacă $X \subset R$ şi $Y \subset R$, atunci vom spune că $f(x)$ este *funcţie reală de variabilă rcală*. Mulţimea $[x, f(x)] \in R \times R$ se numeşte *graficul* funcţiei şi se obişnuieşte să se reprezinte printr-un arc de curbă, atunci cînd este posibil (fig. 217).

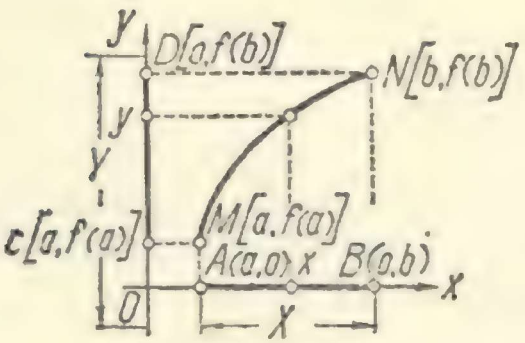


Fig. 217

**2.** Se numeşte *şir infinit*, o funcţie $a(n) = a_n$, definită pe şirul numerelor naturale $n \in N$. Vom scrie dezvoltat un şir sub forma

(294) $\quad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

şi vom numi $a_n$ *termenul general* al şirului.

**3.** Dacă $X_1$ este o submulţime a lui $X$ ($X_1 \subset X$), funcţia $f_1(x) = f_1$, definită pe $X_1$ şi egală cu $f$ pe această submulţime, se numeşte *restricţia* lui $f$ la $X_1$; invers, $f$ se numeşte *prelungirea* lui $f_1$ pe $X$. De exemplu funcţia $f_1 = \sin x$ definită pe cercul trigonometric este restricţia funcţiei $f = \sin x$ pentru orice $x \in R$. Analog pentru celelalte funcţii trigonometrice.

Mulţimea valorilor unei variabile reale se numeşte *interval*; intervalul $a < x < b$ sau $(a, b)$,

* Se foloseşte uneori şi noţiunea de *funcţie multiformă* pentru a exprima că o funcţie are mai multe valori pentru orice $x \in X$.

se zice că este *deschis*, iar $a \leqslant x \leqslant b$, sau $[a, b]$ se zice că este *închis*. Un interval poate fi închis numai la stînga $[a, b)$ sau numai la dreapta $(a, b]$. Mulţimea $x > a$ reprezintă intervalul $(a, +\infty)$ iar $x < a$ reprezintă intervalul $(-\infty, a)$.

Vom numi *vecinătatea* unui număr $a$, orice interval care-l conţine pe $a$, de exemplu toate valorile lui $x$ care satisfac inegalitatea $|x - a| < \delta$, adică intervalul $(a - \delta, a + \delta)$ (interval simetric).

**4.** Vom spune despre o funcţie $f(x)$ că este *strict monotonă* în $(a, b)$ dacă atunci cînd $x$ creşte, $f(x)$ creşte (strict crescătoare (v. fig. 217) ) sau descreşte (strict descrescătoare, fig. 218) adică

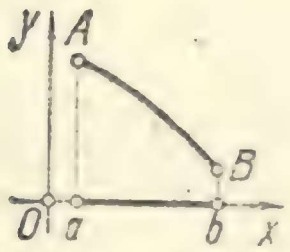



Fig. 218

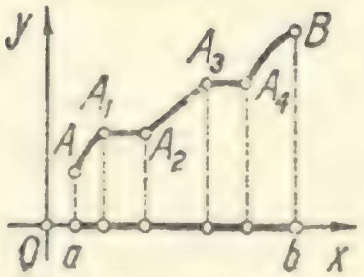



Fig. 219

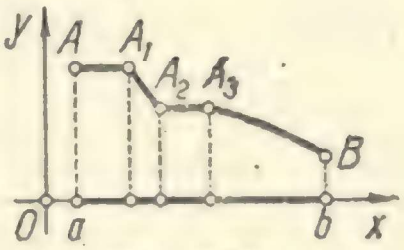



Fig. 220

(295) $a < x_1 < x_2 < b$, $f(x_1) < f(x_2)$ sau $f(x_1) > f(x_2)$ oricare ar fi $x_1$ şi $x_2$. Dacă

(296) $a < x_1 < x_2 < b$, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ funcţia este *crescătoare* (fig. 219).

$f(x_1) \geqslant f(x_2)$ funcţia este *descrescătoare* (fig. 220). De exemplu un şir $a_n$ este *strict crescător* cînd $a_n < a_{+1}$ şi *strict descrescător* cînd $a_n > a_{n+1}$; este *crescător* cînd $a_n \leqslant a_{n+1}$ şi *descrescător* cînd $a_n \geqslant a_{n+1}$.

**5.** Se zice că o funcţie este *mărginită* într-un interval $(a, b)$ cînd există două numere $m$, $M$ astfel ca oricare ar fi $a < x < b$, să avem

$$m < f(x) < M.$$

Se zice că un şir $a_n$ este *mărginit* cînd putem determina două numere $m$, $M$ astfel ca, oricare ar fi $n$,

$$m < a_n < M.$$

În caz contrar funcţia sau şirul se numesc *nemărginite*.

**6.** Fie $y = f(x)$ o funcţie bijectivă cînd $x \in X$, $y \in Y$. Se numeşte *inversa* funcţiei $f$ şi se notează cu $f^{-1}$ funcţia care satisface relaţiile

$$f^{-1}[f(x)] = x, \quad f[f^{-1}(x)] = x. \tag{297}$$

Orice funcţie bijectivă are o inversă. Graficul unei funcţii inverse este simetric faţă de prima bisectoare (fig. 221).

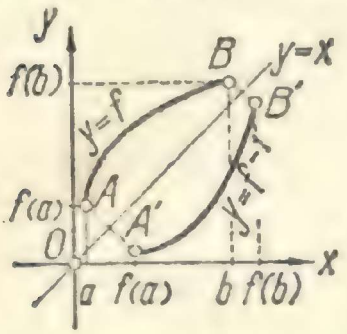
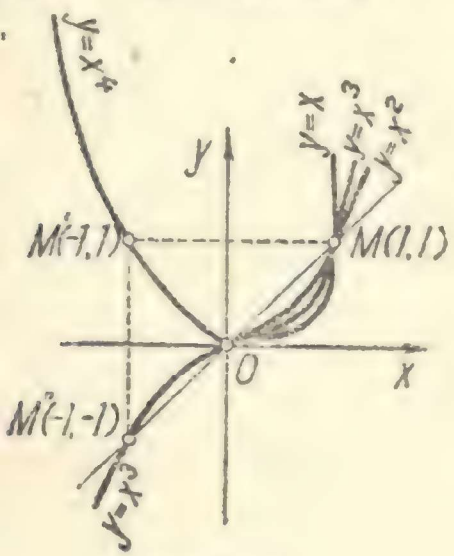


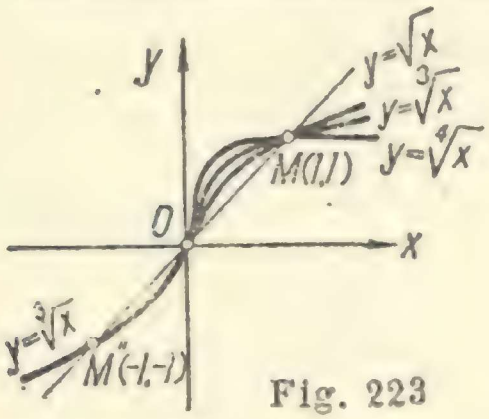
Fig. 221

**7.** Fie $f$ o funcţie definită pe o mulţime $X$ cu valori în mulţimea $Y$ şi o altă funcţie $g$ definită pe $Y$ cu valori într-o mulţime $Z$. Atunci funcţia

$$z = g[f(x)] = (g \circ f)(x) \tag{298}$$

definită pe $X$ cu valori în $Z$ o vom numi *funcţie compusă*. În cazul (297), funcţia $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$ este funcţia identitate.

| Funcția | $X$ mulțimea de definiție | $Y$ mulțimea valorilor funcției | Proprietăți |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x^n$ $(n \in N)$   Fig. 222 | $R$ | $R^+$ dacă $n$ este cu soț<br>$R$ dacă $n$ este fără soț | § 1.4 |
| $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(2 \leqslant n \in (N)$ | $R^+$ dacă $n$ este cu soț<br>$R$ dacă $n$ este fără soț | $R^+$<br>$R$ | § 1.4 |
| $f(x) = P(x)$, $P$ polinom | $R$ | $R$ | § 1.2 |

| Funcția | X mulțimea de definiție | Y mulțimea valorilor funcției | Proprietăți |
|---|---|---|---|
|  Fig. 223 | | | |
| $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $P$ și $Q$ polinoame; $f(x)$ se numește *fracție rațională* ($Q$ nu divide pe $P$) | $R-\{x_1,\ldots,x_m\}$, $x_i$ fiind rădăcinile reale ale ecuației $Q(x)=0$ | $R$ | § 1.2 |
| $y=\sin x$ (fig. 10) | $R$ | $[-1,+1]$ | § 3.1.2 |
| $y=\cos x$ (fig. 11) | $R$ | $[-1,+1]$ | § 3.1.2 |
| $y=\operatorname{tg} x$ (fig. 12) | $R-\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}_{k\in N}$ | $R$ | § 3.1.2 |

*T. 22 (continuare).*

| Funcția | $X$ mulțimea de definiție | $Y$ mulțimea valorilor funcției | Proprietăți |
|---|---|---|---|
| $y = \operatorname{cotg} x$ (fig. 13) | $R - \{k\pi\}_{k \in N}$ | $R$ | § 3.1.2 |
| $y = \arcsin x$ (fig. 14) | $[-1, +1]$ | $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ | § 3.1.3 |
| $y = \arccos x$ (fig. 17) | $[-1, +1]$ | $[\pi, 0]$ | § 3.1.3 |
| $y = \operatorname{arctg} x$ (fig. 19) | $R$ | $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\right]$ | § 3.1.3 |
| $y = \operatorname{arccotg} x$ | $R$ | $[\pi, 0]$ | § 3.1.3 |
| $y = a^x$ $(0 < a < 1)$; în particular $y = (1/e)^x = e^{-x}$ (§ 2.5); are tabloul de variație<br>$x$: $-\infty$ 0 1 $+\infty$<br>$a^x$: $+\infty$ ↘ 1 ↘ $a$ ↘ 0 | $R$ | $R^+ - \{0\}$ | funcția este strict descrescătoare |

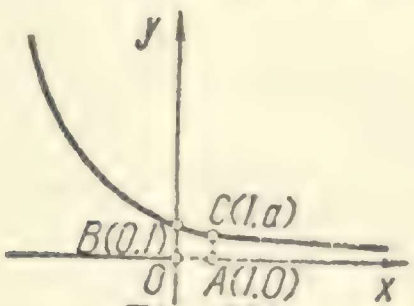
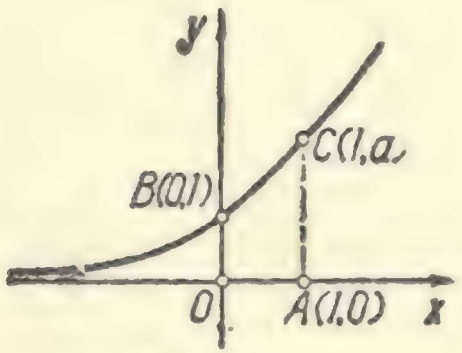
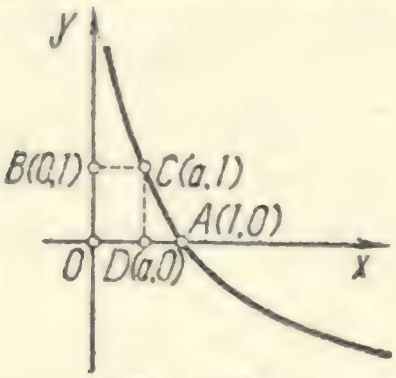


Fig. 224

| Funcția | X mulțimea de definiție | Y mulțimea valorilor funcției | Proprietăți |
|---|---|---|---|
| $y = a^x$ $(a>1)$; în particular $y = e^x$ (§ 2.5); are tabloul de variație<br>$\begin{array}{c\|c} x & -\infty \quad 0 \quad 1 \quad +\infty \\ \hline a^x & 0 \nearrow 1 \nearrow a \nearrow +\infty \end{array}$<br>  <br><br>Fig. 225 | $R$ | $R^+ - \{0\}$ | Funcția este strict crescătoare |
| $y = \log_a x$ $(0<a<1)$<br>(§ 2.5) are tabloul de variație<br>$\begin{array}{c\|c} x & 0 \quad a \quad 1 \quad +\infty \\ \hline \log_a x & +\infty \searrow 1 \searrow 0 \searrow -\infty \end{array}$ | $R^+ - \{0\}$ | $R$ | Funcția este strict descrescătoare |

| Funcţia | X mulţimea de definiţie | Y mulţimea valorilor funcţiei | Proprietăţi |
|---|---|---|---|
|  Fig. 226 | | | |
| $y = \log_a x$ $(a > 1)$; în particular $y = \ln x$ (§ 2.5); are tabloul de variaţie | $R^+ - \{0\}$ | $\boldsymbol{R}$ | Funcţia este strict crescătoare |

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log_a x$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

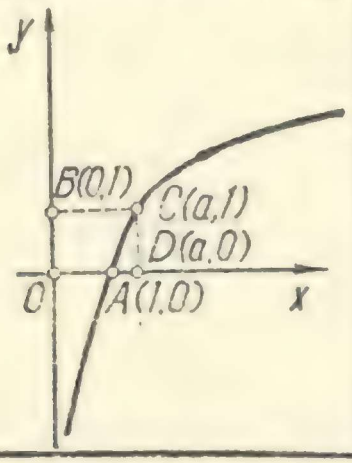


Fig. 227

**1. Proprietăţile logaritmilor.**

a) Logaritmii în baza 10 se numesc *vulgari* sau *zecimali* şi se notează cu lg; logaritmii în baza $e$ se numesc *naturali* şi se notează cu ln. În general, logaritmii în baza $a$ se notează cu $\log_a$. Trecerea de la baza $a$ la baza $b$ se face prin formula

(299) $$\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a,$$

$\log_b a$ se numeşte *modulul* transformării. În particular, $\lg e = 0{,}43429\ldots$, $\ln 10 = 2{,}30259\ldots$ Avem în general $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

b) Avem

(300)
$$10^{\lg A} = A; \quad \lg 1 = 0; \quad \lg 10 = 1;$$
$$\lg \frac{1}{10} = -1, \ldots, \lg 10^n = n;$$
$$e^{\ln A} = A; \quad \ln 1 = 0; \quad \ln e = 1;$$
$$\ln \frac{1}{e} = -1, \ldots, \ln e^n = n;$$

(301)
$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B;$$
$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B;$$
$$\log_a A^n = n \log_a A;$$
$$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A.$$

$(A > 0, B > 0)$

**2. Calculul cu logaritmi.** În baza proprietăţilor precedente, prin logaritmi, calculul produselor, cîturilor şi puterilor se reduc la sume, diferenţe şi înmulţiri (împărţiri). Se pune deci problema directă: găsirea logaritmului unui număr, şi apoi invers: găsirea numărului cînd îi cunoaştem logaritmul. Vom presupune că lucrăm cu tabele de logaritmi zecimali cu cinci zecimale (procedeul este acelaşi oricîte zecimale am avea).

a) *Logaritmul unui număr* are o parte întreagă numită *caracteristică* şi una zecimală numită *mantisă*.

b) *Calculul caracteristicii* (*c.*). Dacă numărul are parte întreagă, c. pozitivă şi este cu o unitate mai mică decît numărul cifrelor părţii întregi (de ex., 75, 345 are c. 1 iar 8,645 are c. 0).

Dacă numărul nu are parte întreagă, c. este negativă (semnul se pune deasupra) şi are atîtea unităţi care reprezintă a cîta cifră semnificativă este după 0 (de ex., 0,85 are c. $\overline{1}$ iar 0,0085 are c. $\overline{3}$)

c) *Calculul mantisei* (*m.*). În acest calcul se suprimă virgula numărului şi se pot adăuga la urmă cîte zerouri vrem.

*Cazul întîi.* Numărul are cel mult 4 cifre; m. se găseşte în tabele, primele două cifre găsindu-se în coloana 0. (de ex., pentru 857 căutăm la $N = 857$ pe coloana 0 şi găsim m. 93298, sau m. lui 6762 se caută pe coloana $N$ la 676 şi se continuă pe linie pînă la coloana 2, care ne dă m. 83008.

*Cazul al doilea.* Numărul are mai mult de patru cifre; se procedează prin *interpolare* folosind două numere cu patru cifre $N_1$, $N_2$ între care este cuprins $N$, după regula

(302)
$$\frac{M - M_1}{N - N_1} = \frac{M_2 - M_1}{N_2 - N_1};$$
$$M = M_1 + \frac{N - N_1}{N_2 - N_1}(M_2 - M_1),$$

unde $M_1$, $M_2$ și $M$ sînt mantisele lui $N_1$, $N_2$ și $N$ (de ex., $N = 43{,}5768$ se suprimă virgula și luăm $N_1 = 4357$, $N_2 = 4358$; găsim în tabele $M_1 = 63919$, $M_2 = 63929$; deci $M = 63919 + \frac{0{,}68}{1} \cdot 10 = 63919 + 6{,}8 = 63926$ și $\lg N = 1{,}63926$).

d) *Găsirea numărului cînd cunoaștem logaritmul.* Dacă *m.* se găsește în tabele, cifrele din coloana N la care se adaugă cifra coloanei în care am găsit *m.* dă numărul a cărui valoare se determină în funcție de caracteristică invers decît am spus mai sus la *A.* (de ex., $\lg N = 1{,}66115$, rezultă $N = 45{,}83$; $\lg N = \overline{2}{,}93176$, rezultă $N = 0{,}08556$)

$m$. nu se găseşte în tabele. Se foloseşte (302) scrisă sub forma

(302′)
$$\frac{N - N_1}{M - M_1} = \frac{N_2 - N_1}{M_2 - M_1};$$
$$N = N_1 + \frac{M - M_1}{M_2 - M_1}(N_2 - N_1).$$

cu aceleaşi notaţii ca mai sus situînd pe $M$ dat între două mantise $M_1$, $M_2$ corespunzătoare la numerele $N_1$, $N_2$ (de ex., lg $N = 0{,}34952$, $N_1 = 2236$, $N_2 = 2237$; $M_1 = 34947$, $M_2 = 34967$, deci $N = 2236 + \frac{5}{20} = 223625$; nu se pune virgulă şi în final $N = 2{,}23625$).

d) *Calcule cu logaritmi. Suma* se face ca la numerele obişnuite adunînd mantisele *(care sînt întotdeauna pozitive)* şi ceea ce prisoseşte se adună la caracteristice cu semnul +, care şi ele la rîndul lor, se adună ca numerele algebrice. (de ex., $\bar{3}{,}85342 + 1{,}73602 = \bar{1}{,}58944$).

*Diferenţa* se face transformînd logaritmul de scăzut în *cologaritm*; cologaritmul unui număr se obţine adăugînd la caracteristică +1 şi schimbîndu-i semnul, iar la mantisă scădem toate cifrele din 9 iar ultima semnificativă din 10

(de ex., $\overline{1},23567 - \overline{2},34570 = \overline{1},23567 + 1,65430 = 0,88997$).

*Înmulţirea* cu un număr natural se face în mod obişnuit (de ex., $4 \times \overline{1},65023 = \overline{2},60092$).

*Împărţirea* cu un număr natural se face în mod obişnuit dacă caracteristica este pozitivă; dacă însă este negativă, se completează cu atîtea unităţi pînă împărţirea se face exact şi unităţile adăugate se aşază în faţa mantisei $\left(\text{de ex., } \frac{1}{3}\overline{1},23576 = \frac{\overline{3}}{3} + \frac{1}{3}2,23576 = \overline{1},74525\right)$.

## § 7.3. Noţiunea de limită

**1. Şiruri convergente.** Se zice că un şir $a_n$ este *convergent* şi are ca limită un număr finit $a$, dacă şi numai dacă unui număr $\varepsilon > 0$ *arbitrar*, putem face să-i corespundă un *rang* $N$ astfel ca pentru *toate* valorile lui $n > N$ să avem

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{303}$$

Aceasta este totuna cu a spune că în afara *oricărei* vecinătăţi a lui $a$ se găsesc numai un număr finit de termeni ai şirului. Vom scrie. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Orice şir monoton mărginit este convergent. Şirul

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{303'}$$

este strict crescător şi mărginit superior; limita lui se notează cu $e = 2{,}7182\ldots$ (număr transcendent § 1.1.8 b).

**2.** Se zice că un şir $a_n$ tinde către $+\infty$, dacă şi numai dacă unui număr *M arbitrar*, putem face să-i corespundă un *rang N* astfel ca pentru *toate* valorile lui $n > N$ să avem

$$a_n > M. \tag{304}$$

Aceasta este totuna cu a spune că în afara oricărei vecinătăţi a lui $+\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului. Vom scrie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Definiţie analogă pentru şiruri care au ca limită pe $-\infty$. Orice şir crescător nemărginit are limita $+\infty$, iar orice şir descrescător nemărginit are limita $-\infty$.

Orice şir care nu este convergent se numeşte *divergent*. Un şir poate fi divergent avînd ca limită pe $\pm\infty$ sau ne avînd o limită unică, ca în cazul convergenţei.

**3.** Dacă oricare ar fi şirul $x_n (x_n \in X)$ care are ca limită pe $a$ $(x_n \neq a)$, şirul valorilor funcţiei

$f_n = f(x_n)$ are *aceeași limită* $l$, vom spune că $f(x)$ are ca limită pe $l$ și vom scrie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. În această definiție $a$ sau $l$ pot fi $\pm\infty$.

Avem următoarele teoreme:

a) Dacă $|f(x)| \leqslant g(x)$ și dacă $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

b) Dacă $f(x) \geqslant g(x)$ și dacă $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

c) Dacă $f(x) \leqslant g(x)$ și dacă $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

4. Dacă oricare ar fi șirul $x_n (x_n \in X)$ astfel ca $x_n < a$, are ca limită pe $a (x_n \neq a)$, șirul valorilor funcției $f_n = f(x_n)$ are aceeași limită $l_s$, vom spune că $f(x)$ are *la stînga* ca limită pe $l_s$. Vom obișnui să notăm această limită cu $l_s = f(a - 0)$ și vom scrie $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l_s = f(a - 0)$. Analog se definește limita *la dreapta*: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l_d = f(a + 0)$. Cele două limite se numesc *limite laterale*.

## 5. Operaţii cu limite (valabile şi pentru şiruri):

(305) $$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x).$$

(306) $$\lim_{x\to a}[m\,f(x)]=m\lim_{x\to a}f(x)\qquad (m=\text{const}).$$

(307) $$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

(308) $$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\quad[\lim_{x\to a}g(x)\neq 0].$$

(309) $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=[\lim_{x\to a}f(x)]^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

$[f(x)>0]$

În aceste formule presupunem că toate limitele există şi că expresiile din dreapta au sens. Formulele (309) şi (307) se pot generaliza în cazul în care avem un număr finit de funcţii.

## 6. Limite importante.

(310) $$\lim_{x\to a}c=c\ (c=\text{const})$$

(311) $$\lim_{x\to\varepsilon\infty}(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n)=(A_0\varepsilon^n)\infty\qquad(\varepsilon=\pm 1).$$

(312) $$\lim_{x\to\varepsilon\infty}\frac{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n}{B_nx^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}x+B_m}=$$
$$=\begin{cases}0 \text{ cînd } n<m,\\ \dfrac{A_0}{B_0} \text{ cînd } n=m, \quad (\varepsilon=\pm 1)\\ (A_0/B_0)\varepsilon_\infty^{n-m} \text{ cînd } n>m.\end{cases}$$

(313) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} mx}{x}=m.$$

(314) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0 \ (\varepsilon\in R^+).$$

(315) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty(\alpha\in R^+).$$

(316) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2k}}=+\infty(k\in N).$$

(317) $$\lim_{\substack{x\to 5\\ x<0}}\frac{1}{x^{2k+1}}=-\infty(k\in N).$$

(318) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x^{2k+1}}=+\infty(k\in N).$$

(319) $$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to\infty}}(1+\alpha)^\beta=e^{\lim\alpha\beta}$$

(320) $$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\left|\lim_{n\to\infty}a_n\right|.$$

## § 7.4. Funcții continue

**1.** Fie $f(x)$ o funcție definită pe $X$ cu valori în $Y$ și $x_n \in X$, un șir oarecare avînd ca limită pe $x_0$. Dacă șirul $f_n = f(x_n) \in Y$ are ca limită pe $f(x_0) \in Y$, atunci se zice că $f(x)$ este *continuă* în $x_0$. Adică

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Această definiție mai poate fi enunțată: se zice că o funcție $f(x)$ este continuă pentru valoarea $x = x_0$, dacă unui $\varepsilon > 0$ arbitrar, putem face să-i corespundă un *număr* $\delta > 0$, astfel ca pentru *toate* valorile lui $x$ care satisfac inegalitatea $|x - x_0| < \delta$, să avem

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Se zice că o funcție este continuă pe $X$ cînd este continuă pentru toate valorile lui $x \in X$. Graficul unei funcții continue este construit dintr-o trăsătură continuă în intervalul de definiție.

Punctele în care o funcție nu este continuă, se numesc *puncte de discontinuitate*.

**2. Proprietățile funcțiilor continue.**

a) Dacă $f$ și $g$ sînt funcții continue pe mulțimea $X$, atunci funcțiile $f + g$, $mf (m = \text{const})$, $fg$, $f/g$ sînt continue pe $X$ (presupunînd în ultima $g \neq 0$ pe $X$).

b) O funcţie compusă definită cu ajutorul a două funcţii continue pe $X$ este de asemenea continuă pe $X$.

c) Funcţia inversă a unei funcţii bijective continue, este continuă pe $Y$.

### 3. Continuitatea funcţiilor elementare.

*T. 23.*

| Funcţia | Mulţimea de continuitate | Funcţia | Mulţimea de continuitate |
|---|---|---|---|
| $P(x)$, polinom | $x \in R$ | $\cos x$ | $x \in R$ |
| $\frac{P(x)}{Q(x)}$ fracţie raţională | $x \in R - \{x_1, \ldots, x_p\}$, $x_p$ fiind rădăcinile reale ale ec. $Q(x) = 0$ | $\operatorname{tg} x$ | $x \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in N$ |
| | | $\operatorname{cotg} x$ | $x \in R - \{k\pi\}$, $k \in N$ |
| $x^m (m \in R)$ | $m > 0 \quad x \in R$ | $\arcsin x$ | $x \in [-1, +1]$ |
| | $m < 0$ $x \in R - \{0\}$ | $\arccos x$ | $x \in [-1, +1]$ |
| $a^x (a > 0)$ | $x \in R$ | $\operatorname{arctg} x$ | $x \in R$ |
| $\log_a x (a > 0, \neq 1)$ | $x \in R^+ - \{0\}$ | $\operatorname{arccotg} x$ | $x \in R$ |
| $\sin x$ | $x \in R$ | | |

## § 7.5. Funcții derivabile

**1.** Se consideră o funcție $f : X \to Y$ definită pe intervalul $X$ și fie $x_0 \in X$. Calculăm *creșterile* $\Delta x = x - x_0$, $y = f(x) - f(x_0)$ pentru $x$ vecin cu $x_0$. Dacă

$$(321) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

*există* și este *finită* se zice că funcția $f(x)$ este *derivabilă* în $x_0$ și are ca derivată pe $f'(x_0)$. Vom spune că $f(x)$ este derivabilă pe $X$, dacă este derivabilă în toate punctele $X$. Funcția derivată se notează cu $y' = f'(x) = dy/dx$. O funcție derivabilă pe $X$ este în același timp continuă pe $X$.

**2.** Dacă raportul (321) nu are limită într-un punct $x_0$, dar are o limită la stînga și una la dreapta, vom spune că aceste limite sînt respectiv *derivata la stînga* $f'(x_0 - 0)$ și *derivata la dreapta* $f'(x_0 + 0)$ ale funcției $f(x)$ în $x_0$.

## 8. Derivatele funcţiilor elementare.

*T.* 24.

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $c = \text{const}$ | $0$ | $\log_a x$ $(a>0,\neq 1)$ | $\frac{1}{x}\log_a e$ |
| $x^m (m \in R)$ | $mx^{m-1}$ | $\sin ax$ | $a \cos ax$ |
| $\frac{1}{x^m}\ (m \in R)$ | $-\frac{m}{x^{m+1}}$ | $\cos ax$ | $-a \sin ax$ |
| $\sqrt[n]{x} (2 \leqslant n \in N)$ | $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $\operatorname{tg} ax$ | $\frac{a}{\cos^2 ax}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\operatorname{cotg} ax$ | $-\frac{a}{\sin^2 ax}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| | | $\operatorname{arccotg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

Funcţiile elementare sînt derivabile pe intervalele de continuitate (T. 23).

**4. Derivatele funcţiilor compuse.** În ipoteza că funcţiile care vor intra în calcule sînt derivabile pe aceeaşi mulţime, avem regulile:

(322) $y = f(u)$ unde $u = g(x)$; $y' = f'_u(u)g'_x(x) = f'_u u'_x$.

(322′) $y = f(u)$ unde $u = g(v)$ iar $v = h(x)$; $y' = f'_u(u)g'_v(v)h'_x(x)$.

(323) $y = cf(x)$ $(c = \text{const})$, $y' = cf'(x)$

(324) $y = f(x) + g(x)$, $y' = f'(x) + g'(x)$.

(325) $y = f(x)\,g(x)$; $y' = f'(x)\,g(x) + f(x)g'(x)$.

(326) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $y' = \dfrac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{g^2(x)}$.

(327) $y = [f(x)]^m$, $y' = m[f(x)]^{m-1}\,f'(x)$.

(328) $y = [f(x)]^{g(x)} = u^v [f(x) > 0$ pe $X]$, $y' = vu^{v-1}\,u' + u^v v' \ln u$.

(329) $y = f^{-1}(x)$, $y' = 1/f'(x)$.

Regulile (324) şi (325) se pot extinde la cazul unui număr finit de termeni, respectiv factori.

Regula (326), mai ales în cazul a mai multor factori, se poate scrie sub forma

$$(326') \quad \frac{[f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)]'}{f_1(x)\ f_2(x)\ \dots\ f_n(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \dots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$$

și se numește *derivata logaritmică* a produsului.

**5.** Funcția $f'(x)$ la rîndul ei poate avea o derivată care se va numi *derivata a doua* a funcției $f(x)$ și o vom nota cu: $y'' = f''(x) = d^2y/dx^2$. Din aproape în aproape se poate vorbi de *derivata de ord. n* a unei funcții și o vom nota cu

$$(330) \qquad y^n = f^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Dacă o funcție admite o derivată de ord. $n$ pe $X$, atunci funcția împreună cu toate derivatele pînă la ord. $(n-1)$ sînt funcții continue.

**6.** În (T. 25) avem exemple de funcții ale căror derivate de ord. $n$ pot fi exprimate prin formule simple.

| $f(x)$ | $f^{(n)}(x)$ |
|---|---|
| $pf(x)+qg(x)$ | $pf^{(n)}(x)+qg^{(n)}(x)$ $(p, q \text{ const})$ |
| $x^m (m \in R)$ | $m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)x^{m-n}$; dacă $m \in N$ şi $m<n$, $f^{(n)}(x)=0$ |
| $(ax+b)^m$ | $m(m-1)\ldots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$ (aceeaşi observare ca la cazul precedent) |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x (a>0)$ | $a^x (\ln a)^n$ |
| $\ln x$ | $(-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$ |
| $\log_a x$ | $(-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n} \log_a e$ |
| $\sin x$ | $\sin\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)$ |
| $\cos x$ | $\cos\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)$ |
| $u(x)v(x)=uv$ | $u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \ldots + C_n^p u^{(n-p)}v^{(p)} + \ldots + uv^{(n)}$ (formula lui Leibnitz) |

**7.** Dacă se dă o creştere $dx$ variabilei, o funcţie derivabilă capătă o creştere care este aproximativ egală cu

$$f(x + dx) - f(x) \sim f'(x)dx \tag{331}$$

şi care se numeşte *diferenţiala* funcţiei $y$ şi se notează cu

$$dy = f'(x)dx. \tag{331'}$$

Dacă $f(u)$ este funcţie compusă, diferenţiala se calculează prin aceeaşi formulă (331'). Avem regulile:

$$\boxed{\begin{aligned} &d[f(x) + g(x)] = df(x) + dg(x);\\ &d[f(x)g(x)] = f(x)dg(x) + g(x)df(x);\\ &d\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}} \tag{332}$$

## § 7.6. Proprietăţile funcţiilor derivabile; extreme, nedeterminări, grafice

În acest paragraf vom considera funcţii $f(x)$ derivabile pe intervalul $X$ avînd valori în $Y$. Nu vor fi menţionate decît excepţiile.

**1.** Dacă $f(x) = 0$ pe $X$, $f(x)$ se reduce la o constantă pe această mulţime. Dacă $f'(x) = g'(x)$ pe

o mulțime $X$, atunci $f(x) = g(x) + C$ ($C$ = const) pe această mulțime.

**2.** Dacă $M[x, f(x)]$ este un punct pe graficul funcției (fig. 228), atunci $f'(x)$, calculată în acest punct, reprezintă coeficientul unghiular al tangentei în $M$ : $\operatorname{tg} \theta = f'(x)$.

Prin tangenta $MT$ într-un punct $M$ la un arc de curbă $AB$, înțelegem limita unei secante variabile $MM'$ cînd $M'$ vine (pe curbă) să se confunde cu $M$. Rezultă că graficul funcției, pe lîngă faptul că este construit printr-o trăsătură continuă (funcția fiind continuă), are în fiecare punct o tangentă unic determinată.

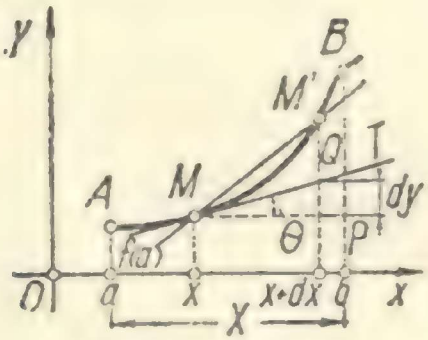



Fig. 228

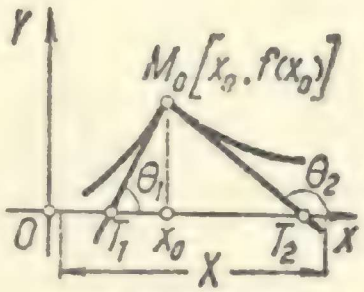



Fig. 229

**3.** Dacă în $M_0[x_0, f(x_0)]$ (fig. 229) funcția nu este derivabilă, dar are o derivată la stînga și una la dreapta, înseamnă că în acest punct graficul are două tangente, una la stînga și alta la dreapta astfel ca $f'(x_0 - 0) = \operatorname{tg} \theta_1$, $f'(x_0 + 0) = \operatorname{tg} \theta_2$.

**4.** Dacă în $x$ funcția este derivabilă (fig. 228), la creșterea variabilei $\Delta x = MP = dx$, corespunde creșterea funcției $\Delta y = PM$; segmentul $PQ$ reprezintă diferențiala funcției $dy$.

**5.** Într-un punct (adică pentru o valoare $x = x_0$), în care derivata $f'(x)$ se anulează, tangenta va fi paralelă cu $Ox$. Dacă $f'(x)$ schimbă de semn cînd $x$ variind, trece prin această valoare se zice că funcția $f(x)$ are în acest punct un *extrem* (fig. 230).

**6.** Într-un punct $x_0$, în care derivata a doua se anulează, curba în general traversează tangenta; în acest caz se zice că graficul are în $x_0$ un *punct de inflexiune* ($x_4$ pe fig. 230 și $x_0$ pe fig. 231).

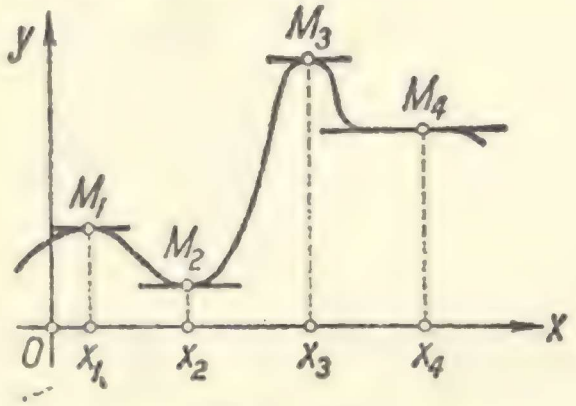



Fig. 230

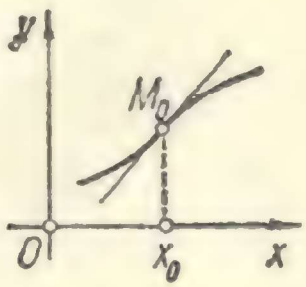



Fig. 231

**7.** Dacă $f'(x) < 0$ pe $X$, atunci funcția $f(x)$ este *strict descrescătoare* pe $X$; dacă $f'(x) > 0$ pe $X$, atunci funcția $f(x)$ este *strict crescătoare*

pe $X$. Dacă $f''(x) > 0$ pe $X$, graficul are *concavitatea* îndreptată spre $y$-cii pozitivi (fig. 232)

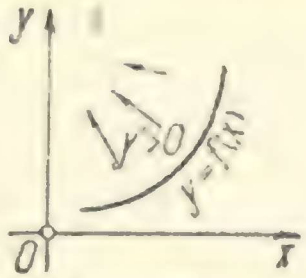



Fig. 232

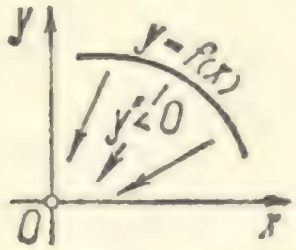



Fig. 233

și dacă $f''(x) < 0$ pe $X$, graficul are concavitatea îndreptată spre $y$-cii negativi (fig. 233).

8. Pentru a decide dacă într-un punct $x_0$, în care $f'(x_0) = 0$, funcția are un extrem, și care este *natura* acestui extrem, vom studia semnul derivatei la stînga și la dreapra lui $x_0$. Dacă $f'(x_0 - h_1) < 0$ și $f'(x_0 + h_2) > 0$ funcția are în $x_0$ un

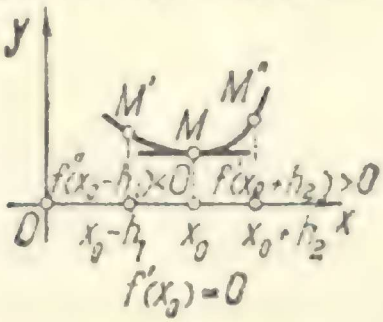



Fig. 234

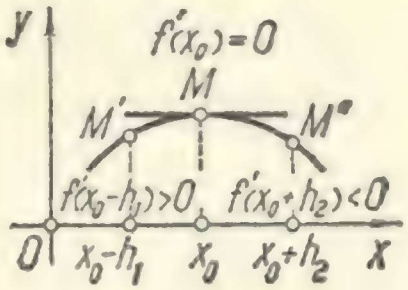



Fig. 235

*minim* (fig. 234) și un *maxim* în caz contrar (fig. 235). De asemenea, dacă $f''(x_0) < 0$, funcția are în $x_0$ un *maxim*, iar dacă $f''(x_0) > 0$, funcția are în $x_0$ un *minim*.

*Observație.* Se poate ca derivata să-și schimbe semnul cînd trece prin $x_0$ fără a avea un extrem în acest punct (fig. 236) în sensul dat la § 7.6.5 deoarece $f'(x_0) \neq 0$; totuși în $x_0$ valoarea funcției este cea mai mare față de valorile vecine.

**9. Teorema lui Rolle.** Dacă în două puncte $x_1 < x_2 \in X$ avem $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ($x_1$ și $x_2$ sînt zerouri ale lui $f$), atunci există *cel puțin* un punct

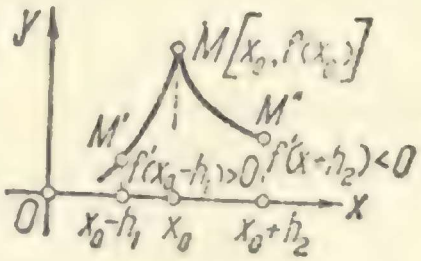



Fig. 236

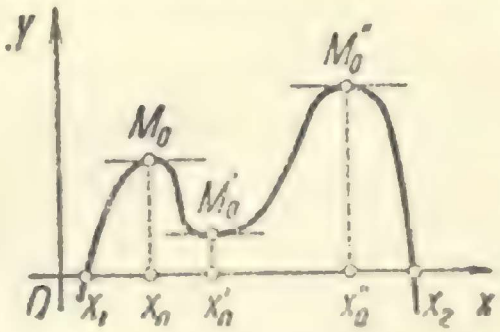



Fig. 237

$x_1 < x_0 < x_2$ în care $f'(x_0) = 0$. Dacă $x_1$ și $x_2$ sînt două zerouri *consecutive*, atunci $f'(x)$ se anulează de un număr fără soț de ori între $x_1$ și $x_2$. Sau mai scurt: între două zerouri consecutive ale funcției, există cel puțin un zero al derivatei (fig. 237).

**10. Teorema lui Lagrange*** (sau a creșterilor finite). Oricare ar fi $x_1 < x_2 \in X$, există un $x_0$ astfel ca $x_1 < x_0 < x_2$ pentru care

*) Teoremele Rolle și Lagrange presupun că funcția $f$ este continuă pe intervalul $X$ închis și derivabilă pe $X$ deschis.

(333) $$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x_0).$$

Interpretarea geometrică a teoremei exprimă faptul că pe grafic există cel puţin un punct de abscisă $x_0$ în care tangenta este paralelă cu coarda $M_1M_2$ (fig. 238).

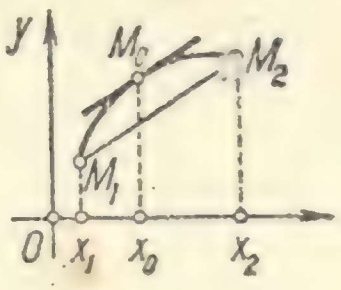


Fig. 238

**11. Nedeterminări.**

a) Se zice că o funcţie are o valoare nedeterminată pentru $x = a$, dacă pentru această valoare, ia una din formele $0/0$, $\infty/\infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$.

b) Formele $0/0$ şi $\infty/\infty$ provin dintr-o funcţie de forma $f(x) / g(x)$. Pentru *ridicarea* acestei nedeterminări, se aplică regula lui l'Hospital al cărei enunţ este:

*Regula lui l'Hospital.* Dacă $f(a) = g(a) = 0$ şi dacă se poate determina o vecinătate pe care $g(x) \neq 0$ afară de $x = a$, atunci

(334) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

în ipoteza că limita din partea dreaptă există. În caz că $f'(a) = g'(a) = 0$, formula (334) se aplică din nou părţii drepte, pînă cînd ultimul raport $f^n(a) / g^n(a)$ are o valoare unic determinată.

Regula lui l'Hospital se aplică și în cazul în care $f(a) = g(a) = \infty$.

c) Forma $0 \cdot \infty$ provine dintr-o funcție de forma $f(x) \cdot g(x)$ dacă $f(a) = 0$, $g(a) = \infty$; scriind sub forma

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)},$$

revenim la una din formele precedente și putem aplica regula lui l'Hospital, bineînțeles la forma pentru care derivatele se calculează mai ușor.

d) Forma $\infty - \infty$ provine dintr-o funcție de forma $f(x) - g(x)$ $[f(a) = g(a) = \infty]$. Scriind

$$f(x) - g(x) = f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right] = g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right].$$

Dacă: $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1$, funcția tinde către $\pm \infty$; dacă limita este 1 se aplică cele spuse la c).

e) Formele $0^\circ$, $\infty^\circ$, $1^\infty$ provin* dintr-o funcție de forma $F(x) = [f(x)]^{g(x)}$ pentru valori 0 sau $\infty$ ale funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$. Aplicînd logaritmii, în $F(x)$ se va prezenta sub forma $0 \cdot \infty$ Pentru ultima nedeterminare, se va ține seamă de (§7.3.6).

**12. Grafice.** Folosind teoremele de mai sus, graficul unei funcții se face după următoarele norme:

*) prin trecere la limită.

a) Se caută mulţimea de definiţie a funcţiei, adică intervalele în care trebuie să se găsească $x$ pentru ca funcţia să ia valori reale. Pentru funcţiile elementare se foloseşte (T. 22).

b) Se calculează limitele laterale la capetele acestor intervale.

c) Se calculează $f(0)$, cînd există, care va reprezenta ordonata punctului unde graficul funcţiei taie axa $Oy$.

d) Calculăm primele două derivate.

e) Calculăm semnul derivatei, determinînd extremele.

f) Calculăm punctele de inflexiune şi sensul concavităţii.

Cu aceste valori construim *tabloul de variaţie* în care prima linie este formată din valorile lui $x$, linia a doua şi a treia conţin semnul primei şi a derivatei a doua, iar linia a patra valorile funcţiei. În ultima linie se introduc şi săgeţi care vor indica mersul graficului.

**13.** Dacă pe graficul unei funcţii avem puncte care se depărtează spre infinit, vom spune că curba reprezentativă are o *ramură infinită*. Dacă există o dreaptă ale cărei puncte se apropie din ce în ce mai mult de punctele curbei astfel ca distanţa dintre ele să tindă către zero cînd $x$ tinde către o valoare finită sau către infinit, vom zice că dreapta este o *asimptotă* a graficului. Asemenea drepte se obţin în felul următor (fig. 239):

a) Asimptotele paralele cu $Oy$ au ca abscise valorile lui $x = x_0$ pentru care funcția $y = f(x)$ este discontinuă și astfel ca $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm \infty$.

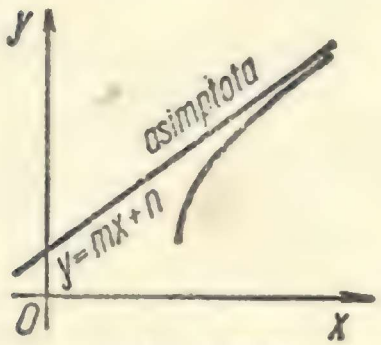


Fig. 239

b) Asimptote paralele cu $Ox$ care au ordonatele date de $\lim y$, bineînțeles cînd această limită este finită.

c) Asimptote oblice, care au ecuația de forma $y = mx + n$ unde $m$ și $n$ sînt calculați prin formulele

$$(335)\quad m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$(335')\quad n = \lim_{x \to \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx].$$

Asemenea asimptote există cînd $m$ și $n$ sînt finiți și $m \neq 0$.

## § 7.7. Ecuații algebrice

**1.** O ecuație algebrică este o ecuație de forma

(336)

$$P(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

$P(x)$ fiind un polinom cu coeficienți reali sau complecși. O asemenea ecuație are $n$ rădăcini $x_1, \ldots, x_n$ complexe cu ajutorul cărora polinomul $P(x)$ se poate scrie sub forma

$$(337)\quad P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Între rădăcinile și coeficienții polinomului avem relațiile

$$(338)\quad \boxed{\begin{gathered}\sum x_i = -a_1/a_0,\ \sum x_1x_2 = a_2/a_0,\ \ldots,\\ \sum x_1 \ldots x_p = (-1)^p a_p/a_0,\ \ldots,\\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_n/a_0.\end{gathered}}$$

În particular, pentru ecuația de gr. 4, avem

$$(339)\quad \begin{gathered}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_1/a_0,\\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = a_2/a_0,\\ (x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -a_3/a_0,\\ x_1x_2x_3x_4 = x_4/a_0.\end{gathered}$$

Se demonstrează că orice polinom simetric de gr. $m$ în $x_1, \ldots, x_n$, se poate scrie sub forma unui polinom în $a_0, \ldots, a_n$ împărțit cu $a_0^m$ $(m \in N)$. Notînd cu

$$(340)\quad S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k\ (k \in N)$$

avem *formulele lui Newton*

(341)

$$a_0 S_k + a_1 S_{k-1} + \ldots + a_{k-2} S_2 + a_{k-1} S_1 + k a_k = 0$$
$$\text{pentru } k \leqslant n,$$
$$a_0 S_{n+k} + a_1 S_{n+k-1} + \ldots + a_{n-2} S_{k+2} + a_{n-1} S_{k+1} + a_n S_k = 0,$$

care permit să calculăm sumele (340) din aproape în aproape. În particular

(341′) $$S_1 = -a_1/a_0, \quad S_2 = (a_1^2 - 2a_0 a_2)/a_0^2,$$
$$S_3 = (-a_1^3 + 3a_0 a_1 a_2 - 3a_0^2 a_3)/a_0^3, \ \ldots$$

**2.** Se zice că o rădăcină este *multiplă de ord. r*, a ecuației (336) (sau a polinomului $P(x)$) dacă în descompunerea (337) se întîlnește de $r$ ori. Ținînd seamă de ordinul de multiplicitate al rădăcinilor, descompunerea (337) se scrie sub forma (§ 2.4.1)

(337′) $$P(x) = a_0 (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \ldots (x - x_p)^{m_p}$$
$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n).$$

Rădăcinile multiple sînt rădăcinile comune ale polinoamelor $P(x)$, $P'(x)$.

(342) Mai general o rădăcină multiplă de ord. $r$ este rădăcină comună tuturor ecuațiilor

$$P(x) = 0, \ P'(x) = 0, \ldots, P^{(r-1)}(x) = 0, \quad P^{(r)}(x) \neq 0.$$

**3. Ecuații cu coeficienți reali.**

a) O ecuație de grad impar are întodeauna o rădăcină reală; în general, o ecuație de grad impar are un număr impar de rădăcini reale, iar o ecuație de grad par un număr par de rădăcini reale, sau nici una. Rădăcinile complexe se grupează două cîte două, astfel încît dacă o ecuație cu coeficienți reali admite o rădăcină complexă, admite și conjugata ei, cu același ordin de multiplicitate; deci un polinom cu coeficienți reali are descompunerea în factori reali

$$(343)\qquad \boxed{\begin{array}{l} P(x) = a_0 (x - x_1)^{m_1} \ldots (x - x_r)^{m_r} (x^2 + \\ + p_1 x + q_1)^{m_{r+1}} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{m_{r+s}}, \\ (m_1 + \ldots + m_r + 2m_{r+1} + \ldots + 2m_{r+s} = n), \end{array}}$$

trinoamele avînd coeficienți reali.

b) Teorema lui Rolle cunoscută de la funcțiile derivabile (§ 7.6.9) se aplică aci în felul următor. Se determină rădăcinile reale ale ecuației derivate (aplicarea teoremei este deci legată de rezolvarea acestei ecuații), care, așezate în ordinea mărimii, să presupunem că sînt $x_1', x_2', \ldots, x_p'$. Se formează șirul

(344)

$$P(-\infty),\ P(x_1'),\ P(x_2'),\ \ldots,\ P(x_p'),\ P(+\infty),$$

numit *şirul lui Rolle*. Numărul schimbărilor de semn ale termenilor acestui şir reprezintă numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $P(x) = 0$.

c) *Teorema lui Descartes*. Numărul rădăcinilor reale pozitive ale unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi reali diferă de numărul schimbărilor de semn al şirului $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cu un număr par. Pentru rădăcinile negative considerăm ecuaţia $P(-x) = 0$.

**4. Metode de rezolvare.**

a) Notăm cu $L$ *limita superioară* a rădăcinilor unei ecuaţii algebrice $P(x) = 0$. Atunci *limita inferioară* $l$ a rădăcinilor pozitive va fi limita superioară a rădăcinilor ecuaţiei $P(1/x) = 0$; de asemenea, limita superioară $-L$ şi cea inferioară $-l$, a rădăcinilor negative ale ecuaţiei date vor fi limitele ecuaţiei $P(-x) = 0$. Rădăcinile reale ale ecuaţiei vor fi cuprinse în intervalele $(-L, -l)$, $(l, L)$. Avem

$$\boxed{L = 1 + \sqrt[r]{\frac{N}{a_0}},} \tag{345}$$

unde $a_0 > 0$ este coeficientul primului termen, $n - r$ este puterea lui $x$ a primului termen negativ (termenii se succed în ordinea descrescătoare a puterilor lui $x$), iar $N$ este cea mai mare valoare absolută a coeficienţilor negativi.

b) Rădăcinile întregi ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi sînt divizorii ultimului termen $a_n$. Dacă $a/b$ ($a$, $b$ întregi) este o rădăcină a unei ecuații cu coeficienți întregi, atunci $b$ este un divizor al lui $a_0$, iar $a$ un divizor al lui $a_n$ (§ 7.7.6).

c) Dacă $a + \sqrt{b}$ este o rădăcină multiplă de ord. $p$ a unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali ($b$ prin ipoteză nu este pătratul unui număr rațional), atunci și $a - \sqrt{b}$ este o rădăcină multiplă de același ordin (§ 7.7.3, a).

Dacă $a$ este o rădăcină a unei ecuații algebrice de gr. $n$, prin împărțirea lui $P(x)$ cu $x - a$, rezolvarea ecuației date se reduce la rezolvarea ecuației $Q(x) = 0$, unde $P(x) = (x - a)Q(x)$.

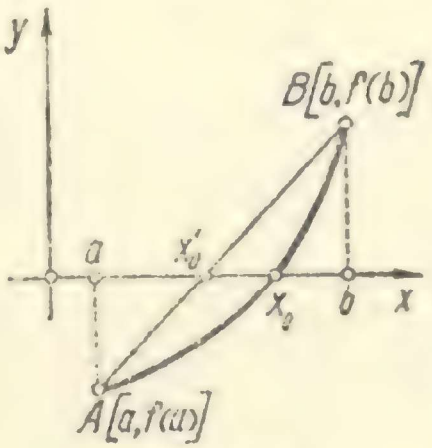


Fig. 240

**5. Metode de aproximare.** Să presupunem că, printr-o metodă oarecare am determinat două numere $a$ și $b$ între care ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină reală simplă și numai una, pe care s-o notăm cu $x_0$; atunci $f(a)f(b) < 0$. O valoare aproximativă a lui $x_0$ este dată prin *metoda coardei* (fig. 240) cu ajutorul formulei

$$x_0' = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{346}$$

A doua metodă se numeşte *metoda tangentei* (fig. 241 şi 242) şi ne dă valori aproximative ale

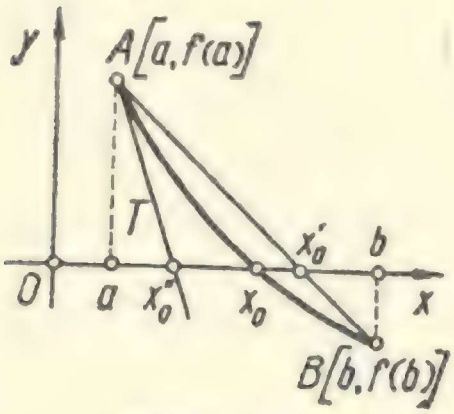



Fig. 241

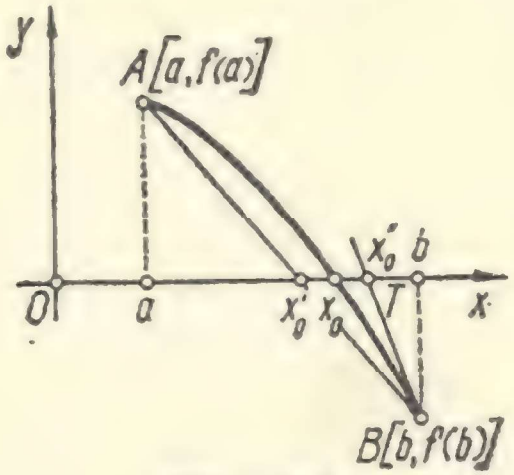



Fig. 242

lui $x_0$ cu ajutorul formulelor

(347)

$$x_0'' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \text{ dacă } f(a)f''(a) > 0$$

sau

$$x_0'' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \text{ dacă } f(b)f''(b) > 0.$$

Valorile $x_0'$ şi $x_0''$ (alese aşa cum s-a spus), sînt întotdeauna valoarea rădăcinii $x_0$, una prin lipsă şi alta prin adaos, încît putem înlocui intervalul iniţial cu $(x_0', x_0'')$ sau $(x_0'', x_0')$. Continuînd cu

acest interval aşa cum am procedat cu primul, ne apropiem din ce în ce mai mult de valoarea lui $x_0$. În ambele metode, eroarea comisă cînd luăm în loc de $a$ sau $b$ pe $x_0'$ sau $x_0''$ este mai mică decît $\frac{(b-a^2)M}{2m}$ unde $M$ este o margine superioară a lui $f''(x)$, iar $m$ o margine inferioară a lui $f'(x)$ în intervalul $[a, b]$. Metodele se pot repeta.

**6. Schema lui Horner** este o metodă practică pentru a încerca dacă $\alpha$ este o rădăcină a unei ecuaţii algebrice $P(x) = 0$. Se aşază pe prima linie coeficienţii ecuaţiei (presupuşi întregi)

$$\begin{array}{llll} a_0 & a_1 & a_2 \ldots & a_n, \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots & b_n, \end{array} \tag{348}$$

iar pe linia a doua numerele $b$ calculate după formula de recurenţă $b_p = a_p + \alpha b_{p-1}$ $(b_0 = a_0)$; cu alte cuvinte un număr de pe linia a doua se capătă adunînd precedentul său înmulţit cu $\alpha$ la numărul corespunzător din prima linie şi aceeaşi coloană. Dacă $b_n = 0$, $\alpha$ este rădăcină şi cîtul împărţirii lui $P(x)$ cu $x - \alpha$ este polinomul

$$Q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}.$$

Dacă $\alpha$ este fracţionar şi unul din numerele $b$, de asemenea este fracţionar, $\alpha$ nu poate fi rădăcină şi deci cînd apare pe linia a doua a schemei (348) un asemenea număr, calculul se opreşte.

## § 7.8. Primitive

**1.** Dacă $f(x)$ este continuă pe $X$, se numeşte *primitivă* o funcţie $F(x)$ care satisface relaţiei $F'(x) = f(x)$ şi se notează cu $\int f(x)\mathrm{d}x$. O funcţie are o infinitate de primitive definite prin relaţia

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C, \tag{349}$$

unde $C$ este o constantă arbitrară numită *constantă de integrare*. Avem proprietăţile

$$\boxed{\int Af(x)\mathrm{d}x = A\int f(x)\mathrm{d}x, \quad (A = \text{const})} \tag{350}$$

$$\boxed{\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.} \tag{350'}$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \text{ arbitrar diferit de } -1).$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln C_1 x.$$

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \ (n \text{ arbitrar diferit de } -1).$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln (ax+b) + C = \frac{1}{a} \ln C_1 (ax+b).$$

$a > 0, \ a \neq 1.$

$$\int e^x \, dx = e^x + C.$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$a > 0, \ a \neq 1.$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

$$\int \sin mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m} + C$$

$$\int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} + C = \frac{1}{2a} \ln \frac{a - x}{a + x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\Delta} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{2ax + b + \sqrt{\Delta}} \right| + C \text{ dacă}$$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0.$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} + C \text{ dacă}$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{a} \ln \left[2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right] + C \text{ dacă } a > 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C$$

dacă $a < 0$.

**3. Metode de integrare.** *Metoda substituţei* constă a înlocui o funcţie $g(x)$ prin $u$ astfel ca în baza relaţiilor

$$g(x) = u, \quad g'(x)\,dx = du,$$

integrala să se reducă la una cunoscută, sau să se prezinte sub o formă mai simplă. După integrare se revine la variabila $x$.

*De exemplu*: a patra integrală din T. 26 se deduce din a doua prin substituţia $ax + b = u$.

b) *Integrarea prin părţi* se bazează pe formula

(351) $$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x).$$

c) *Integrarea fracţiilor raţionale*. O fracţie raţională $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ireductibilă se reduce întotdeauna la cazul în care gr. $P$. gr. $Q$ (§ 2.2.5). Presu-

punînd că polinomul $Q(x)$ este scris sub forma (343), fracţia se poate descompune în *fracţii simple* de forma

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = &\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{A_{m_i}^{m_i}}{(x-x_i)^{m_i}} + \ldots + \frac{A_1^{m_i}}{x-x_i}\right] + \\ &+ \sum_{j=r}^{s}\left[\frac{A_{m_{j+1}}^{m_{j+1}}x + B_{m_{j+1}}^{m_{j+1}}}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_{j+1}}} + \ldots + \right. \\ &\left. + \frac{A_1^{m_{j+1}}x + B_1^{m_{j+1}}}{x^2+p_jx+q_j}\right].\end{aligned}} \tag{852}$$

De exemplu

$$\frac{cx+d}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}, \quad (a \neq b)$$

$$\frac{c_0x^2+c_1x+c_2}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b},$$

$$\frac{c_0x+c_1x+c_2x+c_3}{(x-a)^3(x^2+px+q)^2} = \frac{A}{(x-a)^3} + \frac{B}{(x-a)^2} +$$

$$+ \frac{C}{x-a} + \frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^2} + \frac{Fx+G}{x^2+px+q}$$

$(p^2-4q<0)$.

Pentru determinarea coeficienților numerici $A$, $B$, ... se aduce la același numitor în dreapta și se identifică polinoamele de la numărătorii ambelor părți (§ 2.2.6). În particular, în dezvoltarea (352) avem

$$(352') \qquad \boxed{A_{m_i}^{m_i} = \left[(x - x_i)^{m_i} \frac{P(x)}{Q(x)}\right]_{x=x_i}.}$$

Integralele fracțiilor din partea dreaptă se calculează cu ajutorul formulelor din (T. 26).

## § 7.9. Integrale definite. Aplicații geometrice

**1.** Se consideră o funcție $f(x)$ *mărginită* într-un interval închis $[a, b]$ (fig. 243) pe care se consideră o *diviziune* prin punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$. În fiecare din intervalele determinate, se alege arbi-

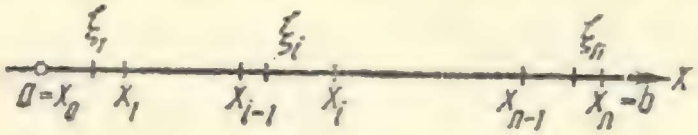



Fig. 243

trar o valoare $x_{i-1} \leqslant \xi_i < x_i$ și apoi se formează suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Dacă această sumă are o limită cînd $n$ tinde către infinit, fiecare interval

tinzînd către zero, se zice că $f(x)$ este *integrabilă* pe $[a, b]$ în *sens Riemann* şi se scrie

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx, \tag{353}$$

$a$ şi $b$ se numesc *limitele* integralei. Integrala nu depinde de valorile $\xi_i$. Funcţiile continue sînt integrabile. Dacă $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{354}$$

**2. Proprietăţi.**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x; \tag{355}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b Af(x)\,\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (A = \text{const}) \tag{356}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{357}$$

**8. Arii.**

a) Dacă arcul care reprezintă graficul funcției $y = f(x)$ nu taie axa $Ox$ și este continuu între $a$ și $b$ (fig. 244), atunci

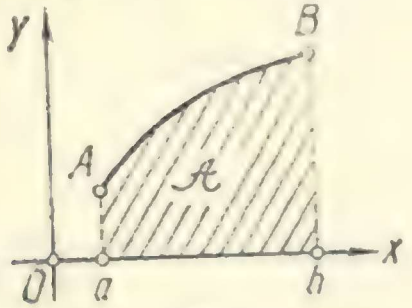



Fig. 244

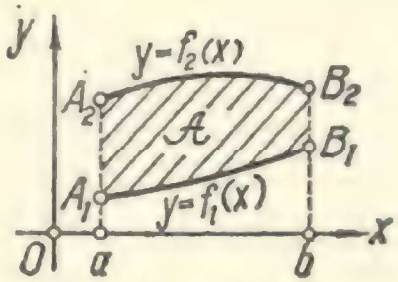



Fig. 245

(358)
$$\mathcal{A}_{aABb} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

b) Dacă arcele $A_1B_1$ și $A_2B_2$ (fig. 245) sînt definite prin ecuațiile $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, ambele deasupra axei $Ox$ și nu se intersectează între ele, atunci

(359)
$$\mathcal{A}_{A_1A_2B_1B_2} = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

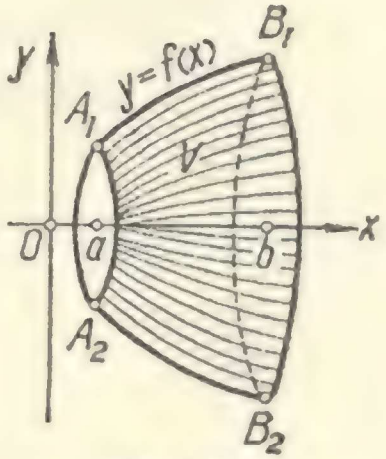



Fig. 246

**4. Volume.** În aceleași condiții, rotind arcul $A_1B_1$ în jurul lui $Ox$ (fig. 246), se obține

un corp de rotație al cărui volum este dat de integrala

$$V_{A_1B_1B_2A_2} = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{360}$$

## § 7.10. Ecuații diferențiale

**1.** O ecuație în care necunoscuta $y$, funcție de $x$, intră prin derivatele ei pînă la ord. $n$ se zice că este o *ecuație diferențială de ord. n*. Soluția unei asemenea ecuații, cînd există, depinde de $n$ constante arbitrare. În general, una din soluții este determinată prin cunoașterea valorilor funcției și primelor $n - 1$ derivate pentru o valoare $x = x_0$; se zice că soluția este determinată prin *condiții inițiale*.

**2. Ecuații de ordinul 1.**

a) *Ecuații cu variabile separabile*, adică ecuații care se scriu sub forma

$$f(x)\, f_1(y)y' = g(x)\, g_1(y). \tag{361}$$

Soluția este definită prin formula

$$\int \frac{f_1(y)}{g_1(y)}\,\mathrm{d}y - \int \frac{g(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = C, \tag{361'}$$

unde $C$ este o constantă arbitrară.

b) *Ecuaţii omogene* sînt ecuaţii de tipul

$$\boxed{y' = f(y/x).} \tag{362}$$

Se integrează prin substituţia $y = tx$.

Se obţine

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}t}{f(t) - t} = \ln Cx \ (C = \text{const}).} \tag{362'}$$

După efectuarea integralei, se înlocuieşte $t = y/x$.

c) *Ecuaţii liniare* sînt ecuaţii de tipul

$$\boxed{y' + f(x)y + g(x) = 0} \tag{363}$$

care au ca soluţii

$$\boxed{y = e^{-\int f\,\mathrm{d}x}\left(C - \int g e^{\int f\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right), \quad (C = \text{const})} \tag{363'}$$

**3. Ecuaţii de ordinul 2 liniare cu coeficienţi constanţi, fără partea dreaptă,** sînt ecuaţii de tipul

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0 \quad (a, b, c = \text{const})} \tag{364}$$

Pentru găsirea soluției, se consideră *ecuația caracteristică*

(365) $$\boxed{ar^2 + br + c = 0.}$$

a) Dacă (365) are rădăcini reale $r_1 \neq r$ atunci

(364′) $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ $(C_1, C_2 = \text{const})$.

b) Dacă (365) are o rădăcină dublă $r$, atun

(364″) $y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$ $(C_1, C_2 = \text{const})$.

c) Dacă (365) are rădăcinile complexe $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, atunci

(364‴) $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
$(C_1, C_2 = \text{const})$.

# 8. MECANICĂ

## § 8.1. Elemente de statică

1. În mecanică o forță este reprezentată printr-un vector; dacă este aplicată unui punct material este considerată ca un vector legat (§ 6.1.1), iar dacă este aplicată unui corp solid rigid este reprezentată printr-un vector alunecător. Operațiile cu forțele se deduc din operațiile cu vectori.

Fiind dată forța **F** (fig. 247) reprezentată prin vectorul alunecător **AB** (caracterizat prin mărime, sens și suportul $\Delta$), se numește *momentul* său față de un punct *O (pol)* exterior lui $\Delta$, produsul vectorial $\mathbf{M}_0 = \mathbf{OA} \times \mathbf{AB}$. Prin definiție momentul este invariant față de poziția forței pe suport și este nul cînd $\mathbf{F} = 0$ sau cînd polul se găsește pe suportul forței.

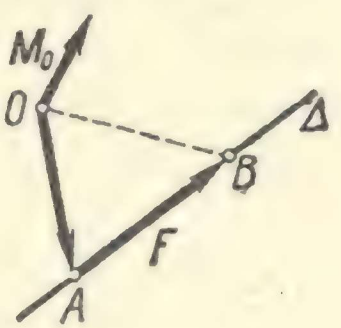


Fig. 247

2. Dacă $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ sînt mai multe forțe formînd un sistem $(S)$, care acționează asupra unui

corp solid rigid, prin *rezultanta generală* **R** într-un punct $O$ se înţelege suma acestor vectori consideraţi liberi, iar prin momentul rezultant $\mathbf{M}_O$ faţă de $O$, suma momentelor componentelor faţă de acest punct. Momentul faţă de $O'$ al rezultantei generale aplicată în $A$, a unui sistem de vectori concurenţi în $A$, este egal cu suma momentelor vectorilor componenţi (Varignon).

**3.** Se numeşte *cuplu* un sistem format din doi vectori alunecători $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$ paraleli (fig. 248). Momentul rezultant al cuplului $\mathbf{M}$ este acelaşi în orice punct al spaţiului. Un sistem de forţe $\mathbf{F}_i$ este în general echivalent cu sistemul format dintr-un vector şi un cuplu.

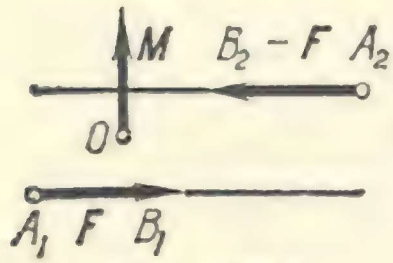


Fig. 248

Condiţia necesară ca un corp solid rigid să fie în echilibru este ca sistemul de forţe care acţionează asupra solidului să fie echivalent cu zero. Această condiţie devine şi suficientă dacă corpul este în repaos.

**4. Forţe paralele.** Presupunem că avem un sistem $(S)$ format din $n$ forţe paralele $\mathbf{F}_i$ (fig. 249).

a) Dacă $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \neq 0$, sistemul este echivalent cu

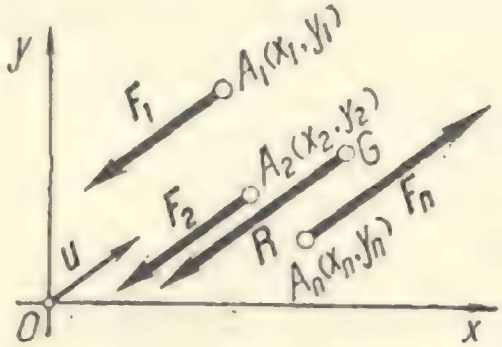


Fig. 249

o *forță rezultantă* $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{u} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$, unde $\mathbf{u}$ este versorul comun forțelor $\mathbf{F}_i$ (§ 6.1.1). Dacă notăm cu $A_i\,(x_i,\ y_i)$ coordonatele punctelor de aplicație a forțelor, punctul de aplicație al rezultantei va fi

$$(366) \qquad \boxed{G\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i},\ \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}\right).}$$

În cazul a două forțe (fig. 250), pentru a găsi pe $G$ luăm pe suportul lui $\mathbf{F}_1$, $A_1C_2 = A_2B_2$ și pe suportul lui $\mathbf{F}_2$, $A_2C_1 = A_1B_1$; dreapta $C_1C_2$ taie pe $A_1A_2$ în $G$. Determinarea lui $G$ în general se poate face geometric din aproape în aproape.

b) Dacă $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0$, $\mathbf{R} = 0$, $(S)$ se reduce la un cuplu $\mathbf{M}_0$ perpendicular pe planul forțelor și a cărui mărime este

$$u_y \sum_{i=1}^{n} F_i\, x_i \quad - u_x \sum_{i=1}^{n} F_i\, y_i\,,$$

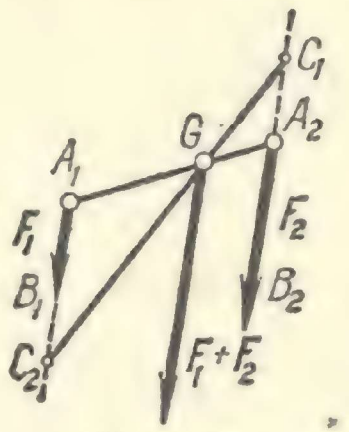


Fig. 250

$u_x$ şi $u_y$ fiind componentele lui **u**; punctul de aplicaţie $G$ este arbitrar (fig. 251).

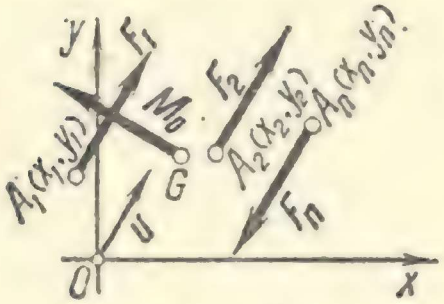


Fig. 251

**5. Centre de greutate.** Fie un sistem de puncte materiale $M_i$ în care avem aplicată o forţă $\mathbf{F}_i$ egală cu greutatea punctului; punctul de aplicaţie al acestor forţe paralele (dirijate pe verticală) se numeşte *centrul de greutate* $G$ al sistemului. Rezultanta este greutatea sistemului. Coordonatele lui $G$ se găsesc la fel ca la § 8.1.4. Analog se defineşte centrul de greutate al unei bare, suprafeţe sau corp *neomogen*. Astfel, dacă o bară, avînd greutatea specifică $\mu(x)$ este aşezată pe $Ox$ (fig. 252), centrul de greutate va avea abscisa

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\mu(x)\,dx}{\int_a^b \mu(x)\,dx}, \tag{367}$$

numitorul reprezentînd *masa* barei. Analog, pentru placa formată din suprafaţa $AA'B'B$ (fig. 253),

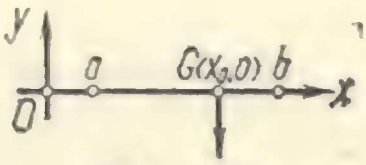


Fig. 252

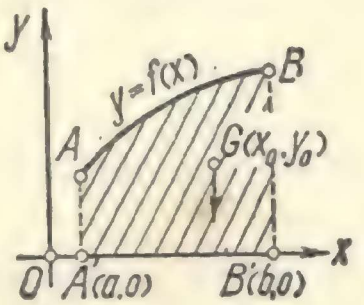


Fig. 253

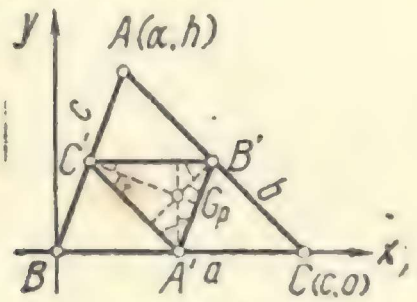
avem
(368)

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\ \mu(x) f(x)\,dx}{\int_a^b \mu(x) f(x)\,dx}, \quad y_0 = \frac{\int_a^b y\ \mu(x) f(x)\,dx}{\int_a^b \mu(x) f(x)\,dx},$$

unde $y = f(x)$ este ecuația arcului ce mărginește placa. Numitorul comun reprezintă masa plăcii.

**6. Centre de greutate a corpurilor omogene** [$\mu(x) = \text{const}$] mai des întîlnite:

*T. 27.*

| Linii, suprafețe și corpuri materiale | Centrul de greutate |
|---|---|
| Segmentul de dreaptă | $G$ mijlocul segmentului |
| Perimetrul unui triunghi   Fig. 254 | $G_p$ este intersecția bisectoarelor triunghiului median; cu notațiile de pe fig. 254 $x_0 = \frac{a(a+2b)+\alpha(c-b)}{2(a+b+c)}$, $y_0 = \frac{h(b+c)}{2(a+b+c)}$. |

| Linii, suprafeţe şi corpuri materiale | Centrul de greutate |
|---|---|
| Perimetrul paralelogramului | $G$ este intersecţia diagonalelor |
| Arc de cerc | $G\left(R\,\dfrac{\sin\alpha}{\alpha},\ 0\right)$, măsurat în radiani (fig. 255) |
| Semicerc | $G\ (2R/\pi,\ 0)$ |
| Cercul | $G$ este centrul cercului |
| Aria triunghiului avînd vîrfurile $M_i\,(x_i, y_i)\ (i = 1, 2, 3)$ | $G$ este la întîlnirea medianelor şi are coordonatele $x_0 = \dfrac{1}{3}\,(x_1 + x_2 + x_3)$, $y_0 = \dfrac{1}{3}\,(y_1 + y_2 + y_3)$ |
| Aria dreptunghiului | $G$ este la intersecţia diagonalelor |

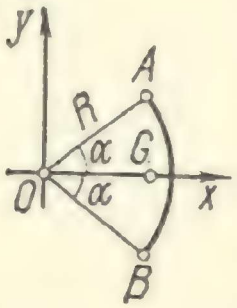



Fig. 255

| Linii, suprafețe și corpuri materiale | Centrul de greutate |
|---|---|
| Aria trapezului | |

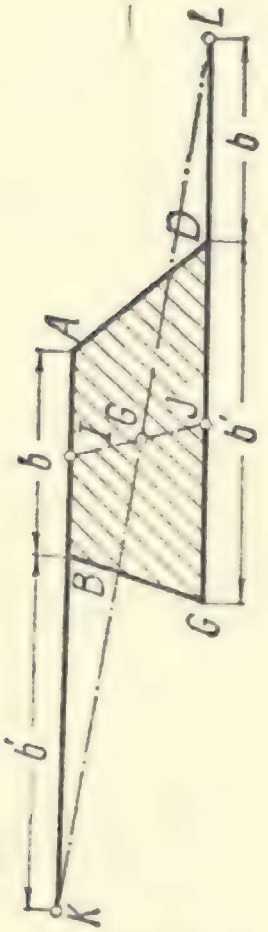
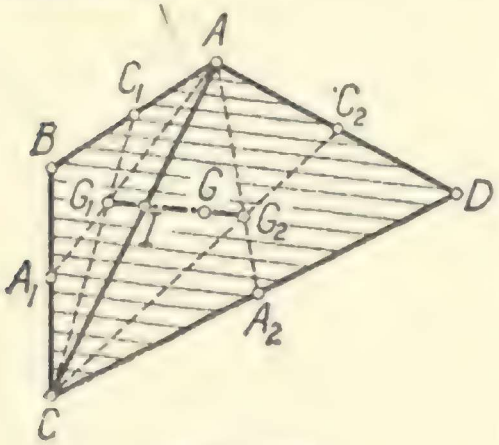
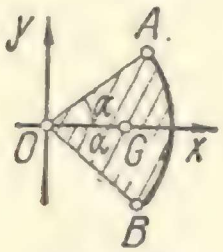



Fig. 256

Pe baza mică se ia $BK = b'$ și pe baza mare $DL = b$; $G$ este la intersecția lui $KL$ cu $IJ$ dreapta care unește mijloacele bazelor.

| Linii, suprafețe și corpuri materiale | Centrul de greutate |
|---|---|
| Aria unui patrulater oarecare<br>  <br><br>Fig. 257 | $G_1$ și $G_2$ sînt centrele de greutate ale triunghiurilor $ABC$, $ACD$; dreapta $G_1G_2$ taie pe $AC$ în $I$ și se ia $IG_2 = G_1I$ |
| Sector de cerc<br>  <br><br>Fig. 258 | $G\left(\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}, 0\right)$ $\alpha$ în radiani |
| Piramida și conul | $G$ se află la $\frac{1}{4}$ de la bază și dreapta care unește vîrful cu centrul de greutate al bazei |

| Linii, suprafețe și corpuri materiale | Centrul de greutate |
|---|---|
| Prisma și cilindrul | $G$ se află la mijlocul dreptei ce unește centrele de greutate ale bazelor |

## § 8.2. Elemente de cinematică

**1.** Un punct în mișcare descrie în plan o curbă numită *traiectorie*. Dacă luăm timpul ca variabilă, coordonatele punctului mobil pe traiectorie vor fi $M[x(t), y(t)]$ și vectorul de poziție (§ 6.1.1)

$$\boxed{r = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.} \tag{369}$$

Se numește *viteză medie* în intervalul de timp $\Delta t$ expresia (fig. 259)

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j}, \tag{370}$$

unde $\Delta r$, $\Delta x$, $\Delta y$ sînt creșterile corespunzătoare lui $\mathbf{r}$, $x$, $y$. *Viteza* punctului este reprezentată prin vectorul

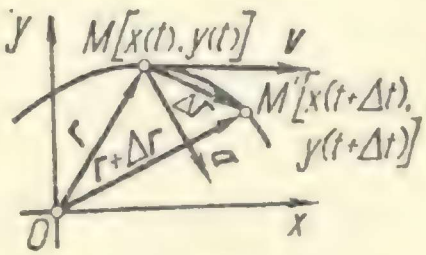



Fig. 259

(371) $$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}}$$

atașat punctului $M$ și situat pe tangenta în $M$ la traiectorie. *Accelerația* mobilului este reprezentat printr-un vector care măsoară în unitatea de timp variația vitezei; are ca expresie

(372) $$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}.}$$

**2. Mișcarea rectilinie** este mișcarea descrisă de un mobil pe o dreaptă, de exemplu axa $Ox$. Se zice că mișcarea este *uniformă* cînd viteza este constantă și deci accelerația nulă; rezultă

(373) $$x = at + b \quad (a,b = \text{const}).$$

Mișcarea se numește *uniform accelerată* cînd accelerația este constantă; în acest caz

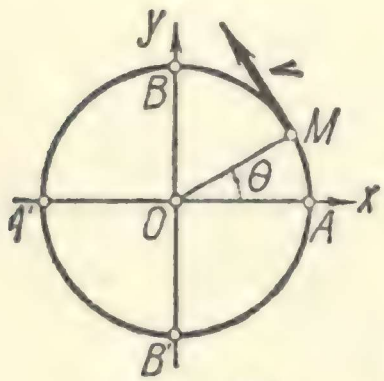


Fig. 260

(374) $$x = \frac{1}{2}at^2 + bt + c \text{ iar}$$

$$v = at + b.$$

**3. Mișcarea circulară** (fig. 260). Notînd cu $\theta(t) = \theta$, unghiul pe care-l face raza punctului mobil cu direcția pozitivă a axei $Ox$,

arcul $AM = R\theta(t)$ măsoară spaţiul parcurs de mobil din poziţia iniţială. Expresia $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ se numeşte *viteza unghiulară* a mobilului. Dacă $\omega = \text{const}$ mişcarea se numeşte *circulară uniformă*. Mişcarea circulară se studiază cu ajutorul reprezentării

(375) $$\boxed{\mathbf{r} = R\cos\theta\mathbf{i} + R\sin\theta\mathbf{j}.}$$

## § 8.3. Elemente de dinamică

**1.** Conform principiilor mecanicii clasice (newtoniene), un punct material în mişcare, sub acţiunea unui sistem de forţe $(S)$, va descrie o mişcare care va satisface ecuaţiei fundamentale

(376) $$\boxed{m\mathbf{a} = \mathbf{F} \text{ sau } m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F},}$$

unde $m$ este *masa* punctului, $a$ *acceleraţia* iar $\mathbf{F}$ *rezultanta* sistemului $(S)$.
Dacă mişcarea este plană, ecuaţia (376) se mai poate scrie sub *forma scalară*

(377) $$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = X(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),\ m\frac{d^2y}{dt^2} = Y(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),}$$

unde $X$ şi $Y$ sînt componentele lui $\mathbf{F}$.

**2.** Se numeşte *impuls* vectorul $\mathbf{H} = m\mathbf{v}$, *moment cinetic* vectorul $\mathbf{K} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, adică momentul vectorului impuls aplicat în $M$, faţă de origine, *energie cinetică* scalarul $E = \frac{1}{2} mv^2$ şi *lucru mecanic* scalarul

$$(378) \qquad \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t} \left( X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} \right) dt.$$

*Teoreme.* a) Derivata impulsului este egală cu rezultanta forţelor ce acţionează asupra lui $M$.

b) Derivata momentului cinetic faţă de origine este egală cu momentul rezultantei faţă de acelaşi punct.

c) Variaţia energiei cinetice între momentele $t$ şi $t_0$ este egală cu lucrul mecanic al rezultantei între aceste momente.

**3.** În mişcarea rectilinie ecuaţiile (377) se reduc la prima. Avem următoarele cazuri importante:

a) Rezultanta $X$ depinde numai de poziţia punctului, adică $X = f[x(t)] = F(x)$. Ecuaţia diferenţială (377) se reduce la

$$(379) \qquad v^2 = \frac{2}{m} \int_{x_0}^{x} F(x)dx + v_0^2 = g^2(x),$$

$$(379') \qquad t - t_0 = \varepsilon \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{g(x)} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

$t_0$ reprezintă *momentul inițial* iar $v_0$ *viteza inițială*; ecuația (379′) inversată, ne dă legea mișcării.

b) $X = f(v)$, rezultă

$$(380) \qquad t - t_0 = m \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)}$$

de unde obținem $v$ funcție de $t$; mai departe

$$(380') \quad x - x_0 = m \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{f(v)} \quad (x_0 = \text{spațiul inițial}),$$

care dă pe $x$ funcție de $v$; dacă vrem să avem pe $x$ funcție de $t$, va trebui să eliminăm pe $v$ între (380) și (380′).

c) $X = f(t)$, atunci

$$(381) \quad x = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} \left( \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt \right) dt + v_0(t - t_0) + x_0$$

cu aceleași notații ca mai sus.

# 9. CALCULUL PROBABILITAŢILOR

## § 9.1. Evenimente, probabilităţi

**1.** Rezultatele obţinute într-o experienţă, se numesc *evenimente*. Mulţimea tuturor evenimentelor legate de o experienţă formează un *cîmp de evenimente* $K$. Printre evenimentele unui cîmp, avem: *evenimentul sigur* $(E)$ care se produce cu certitudine în efectuarea experienţei, *evenimentul imposibil* $(\varnothing)$ care nu se produce în acelaşi proces; în general evenimentele se numesc *aleatoare* deoarece au loc întîmplător.

Într-un cîmp de evenimente introducem o *algebră booleană* (§ 2.1.2) construită cu ajutorul operaţiilor *sau* $(+)$, *şi* $(\cdot)$, *nu* $(\sim)$; vom presupune că orice eveniment nou construit prin aceste operaţii, aparţine cîmpului.

**2.** Se zice că două evenimente, aparţinînd lui $K$, sînt *incompatibile* cînd $A \cdot B = AB = \varnothing$, adică nu pot avea loc simultan; din contră, vom spune că sînt *compatibile* cînd pot avea loc simultan. Mai

multe evenimente pot fi compatibile două cîte două dar incompatibile în ansamblul lor.

Din $K$ scoatem o submulțime $K_1$ pe care o vom numi *de evenimente elementare* $E_i$ dacă:

a) $K_1$ nu conține pe $\varnothing$.

b) Două evenimente ale lui $K_1$ sînt incompatibile, $E_h E_k = \varnothing$.

c) $K_1$ conține toate elementele lui $K$, care se bucură de aceste proprietăți.

Se poate demonstra că cu ajutorul lui $K_1$, putem exprima toate evenimentele lui $K$ putînd fi scrise sub una din formele

$$(382) \quad \varnothing, E_i, E_i + E_j, E_i + E_j + E_h, \ldots, E_1 + E_2 + \ldots + E_n = E.$$

Această proprietate are loc pentru un cîmp finit de evenimente.

**3. Frecvență. Probabilitate.** Să considerăm o experiență și un eveniment $A$ corespunzător acestei experiențe. Repetînd experiența de $n$ ori, evenimentul $A$ se poate reproduce de $m$ ori. Numărul $f_n = m/n$ $(0 < f < 1)$ se numește *frecvență* care evident variază cu numărul de experiențe dar tinde către un număr care se numește *probabilitatea* $P(A)$ a evenimentului $A$. Această proprietate se numește *legea numerelor mari*. În calcule vom lua $P(A) = m/n$. Mulțimea tuturor evenimentelor legate de o experiență împreună cu pro-

babilităţile respective, formează un *cîmp de probabilitate*.

Probabilitatea unui eveniment are următoarele proprietăţi (care pot fi luate ca axiome):

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A) \geqslant 0;\ P(E) = 1; \\ \text{dacă } AB = \varnothing, \text{ atunci} \\ P(A + B) = P(A) + P(B). \end{array}} \tag{383}$$

Avem de asemenea proprietăţile:

$$\boxed{P(\varnothing) = 0,\ P(\tilde{A}) = 1 - P(A).} \tag{384}$$

Relaţia (383) exprimă că probabilitatea producerii cel puţin a unuia din evenimentele incompatibile $A$, $B$ este egală cu suma probabilităţilor fiecărui eveniment în parte.

Dacă $A$, $B$ sînt oricare,

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)} \tag{385}$$

şi mai general *(formula lui Poincaré)*

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \Sigma P(A_i) - \\ - \Sigma P(A_i A_j) + \Sigma P(A_i A_j A_h) - \\ - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n). \end{array}} \tag{385'}$$

**4. Probabilități condiționate.** Dacă într-o experiență se produc succesiv două evenimente $A$, $B$, în general, probabilitatea evenimentului al doilea va fi condiționată de producerea primului eveniment. Notînd cu $P(B|A)$ această *probabilitate condiționată*, avem

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{386}$$

În general, probabilitatea ca să se realizeze $n$ evenimente $A_1, \ldots, A_n$ este dată de formula

$$\begin{aligned} P(A_1A_2 \ldots A_n) &= P(A_1)\, P(A_2|A_1)\cdot \\ &\cdot P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}). \end{aligned} \tag{387}$$

**5. Evenimente independente.** Se spune că două evenimente $A$, $B$ sînt *independente*, dacă

$$P(AB) = P(A)\, P(B). \tag{388}$$

Pentru ca mai multe evenimente să fie independente între ele, trebuie să fie independente două cîte două, trei cîte trei,

$$P(ABC) = P(A)\, P(B)\, P(C) \text{ etc.} \tag{388}$$

**6.** Dacă avem un sistem de evenimente elementare $E_1, \ldots, E_n$ și dacă $A$ este un eveniment oarecare al cîmpului, atunci

$$P(A) = P(E_1)\,P(A|E_1) + \ldots + P(E_n)P(A|E_n), \tag{389}$$

care se numește teorema *probabilității totale*. Avem de asemenea *formula lui Bayes*

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)\,P(A|E_i)}{\sum_{h=1}^{n} P(E_h)\,P(A|E_h)}. \tag{390}$$

## § 9.2. Scheme clasice de probabilitate

**1. Schema lui Poisson.** Se dau $n$ urne $U_1, \ldots, U_n$ care conțin bile albe și bile negre în proporții date, ceea ce ne va permite să calculăm probabilitățile $p_i$ și $q_i = 1 - p_i$, pentru a scoate o bilă albă sau una neagră din fiecare urnă. Extrăgînd din fiecare urnă cîte o bilă, probabilitatea de a avea $k$ bile albe (și deci $n - k$ bile negre) va fi egală cu coeficientul $A_k$ al lui $x^k$ din polinomul

$$\begin{aligned}\Omega(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2)\ldots(p_nx + q_n) = \\ = p_1p_2\ldots p_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \\ + \ldots + A_kx^k + \ldots + A_1x + q_1q_2\ldots q_n.\end{aligned} \tag{391}$$

**2. Schema lui Bernoulli** corespunde cazulu cînd în schema precedentă cele $n$ urne sînt iden tice. În acest caz problema se poate enunța ș astfel: probabilitatea de a scoate $k$ bile albe di $n$ extrageri dintr-o urnă, punînd de fiecare dat bila înapoi, este

$$(392)\qquad \boxed{P_{,,k} = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}\, p^k q^{n-k},}$$

unde $p$ este probabilitatea obținerii unei bil albe într-o singură extragere, iar $q = 1 - p$ pro babilitatea obținerii unei bile negre.

**3. Schema lui Bernoulli cu mai multe stări** Dacă o urnă conține bile de $m$ culori $c_1, c_2, \ldots, c_m$ și $p_i$ este probabilitatea ca la o extragere să se obțină o bilă de culoare $c_i$, atunci probabilitatea ca în $n$ extrageri (cu bilă întoarsă) să obținem $n_1$ bile de culoarea $c_1$ $n_2$ bile de culoare $c_2$, ... $n_m$ bile de culoare $c_m$, este

$$(393)\qquad \boxed{P_{n;\,n,\ldots,n_m} = \frac{n\,!}{n_1\,!\,n_2\,!\ldots n_m\,!}\, p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}}$$
$$(n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n).$$

**4. Schema bilei neîntoarse.** O urnă conține $a$ bile de culoarea $c_i (i = 1, 2, \ldots, m)$; probabilitatea ca în $n$ extrageri să se scoată $n_1$ bile de culoare

$c_1$, $n_2$ bile de culoare $c_2$, ..., $n_m$ bile de culoarea $c_m$ este

$$p = \frac{C_{a_1}^{n_1} C_{a_2}^{n_2} \dots C_{a_m}^{n_m}}{C_{a_1+a_2+\dots+a_m}^{n_1+n_2+\dots+n_m}}. \tag{394}$$

## § 9.3. Variabile aleatoare. Valori tipice

**1.** O variabilă aleatoare este o funcție definită pe mulțimea evenimentelor elementare ale unui cîmp de probabilitate; o vom reprezenta prin tabelul (schema)

$$X\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{pmatrix} \equiv X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \tag{395}$$

numită *repartiția* sau *distribuția* variabilei aleatoare *(discrete)*; prin ipoteză, valorile variabilei $x_i$ sînt diferite între ele, iar $p_i = P(X = x_i)$ satisfac relației

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1. \tag{395'}$$

Se numește *funcție de repartiție* a variabilei aleatoare, expresia

$$F(x) = P(X < x) = p_1 + p_2 + \dots + p_{r-1} \quad (x_{r-1} \leqslant x < x_r). \tag{396}$$

| Repartiția § 9.2 | Variabila aleatoare |
|---|---|
| Poisson | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix}$ |
| Bernoulli | $\begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & k & \dots 0 \\ p^n & C_n^1 p^{n-1} q & \dots & C_n^k p^{n-k} q^k & \dots q \end{pmatrix}$ |
| Bila neîntoarsă | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ \dfrac{C_a^0 C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} & \dfrac{C_a^1 C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} & \dots & \dfrac{C_a^n C_b^0}{C_{a+b}^n} \end{pmatrix}$ |

**2.** În calcule se întîlnesc *operații* cu variabile aleatoare. Astfel: a) Fiind date variabilele

$$X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}\Big(i=1,2,\dots,n\Big), \quad Y\begin{pmatrix} y_j \\ p_j' \end{pmatrix}\Big(j=1,2,\dots,m,\Big),$$

prin *suma* lor înțelegem variabila aleatoare

$$(397)\quad (X+Y)\begin{pmatrix} x_i+y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1\right).$$

Dacă variabilele aleatoare sînt independente (§ 9.1.5), atunci $p_{ij} = p_i p_j$

b) În particular ($a$ = const).

$$(X + a)\begin{pmatrix} x_i + a \\ p_i \end{pmatrix}, \quad (aX)\begin{pmatrix} ax_i \\ p \end{pmatrix}.$$

c) Produsul are repartiția

$$(398) \qquad (XY)\begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1\right).$$

**3. Valoarea medie** a unei variabile aleatoare, este definită prin formula

$$(399) \qquad m = M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

*Proprietăți*

$$M(X + a) = M(X) + a, \quad M(aX) = aM(x),$$
$$M(X + Y) = M(X) + M(Y), \quad \eta < M(X) < \xi$$

unde $\eta$ și $\xi$ sînt respectiv cea mai mare și cea mai mică valoare $x_i$;

$$M(XY) = M(X)M(Y),$$

dacă variabilele $X$ și $Y$ sînt independente.

**4. Dispersia** unei variabile aleatoare este definită prin formula

(400) $$\sigma^2 = D^2(X) = M[(X - m)^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m)^2.$$

*Proprietăți*

$$D^2(X + a) = D^2(X), \quad D^2(aX) = a^2 D^2(X),$$
$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y),$$

ultima având loc dacă variabilele $X$ și $Y$ sînt independente.

*T. 29.*

| Repartiția | Media | Dispersia |
|---|---|---|
| Poisson | $\sum_{i=0}^{n} iA_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$ | $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$ |
| Bernoulli | $np$ | $\sigma = \sqrt{npq}$ |
| Bila neîntoarsă | $na / (a + b)$ | $\sigma^2 = npq \dfrac{a + b - n}{a + b - 1}$ |

## § 9.4. Elemente de statistică matematică

**1.** Statistica matematică se ocupă cu studiul datelor referitoare la un anumit fenomen; orice mulțime care formează obiectul unei analize statistice, se numește *populație statistică*. Trăsătura comună tuturor obiectelor unei populații se numește *caracteristică* care poate fi *cantitativă* (cînd se poate măsura) sau *calitativă*. O analiză statistică a unui fenomen, conduce la o *serie statistică*.

**2.** Vom numi *efectivul* unei populații numărul elementelor acesteia, *frecvență absolută* a unei valori a caracteristicii, numărul de unități ale populației corespunzătoare acestei valori, *frecvența relativă* raportul dintre frecvența absolută și efectivul populației. În statistică noțiunile de *variabilă aleatoare* și *probabilitate* se înlocuiesc cu *caracteristică* sau *variabilă statistică* și *frecvență relativă*. Notînd cu $x$ o valoare a caracteristicii, suma frecvențelor absolute ale tuturor valorilor variabilei mai mici ca $x$ se numește *frecvență absolută cumulată crescătoare* și analog, pentru *frecvență relativă cumulată crescătoare*; ultima joacă rolul funcției de repartiție din cazul variabilelor aleatoare (§ 9.3.1)

**3. Reprezentarea grafică a seriilor statistice (diagrame).**

a) În cazul în care caracteristica este calitativă, seria este reprezentată prin dreptunghiuri avînd aceeași bază, iar înălțimea proporțională cu coefi-

cientul calitativ. În fig. 261 este reprezentată o producţie prin procentele anumitor părţi ale ei.

b) În cazul în care caracteristica este calitativă se face o reprezentare grafică cu ajutorul unui sistem de axe perpendiculare:

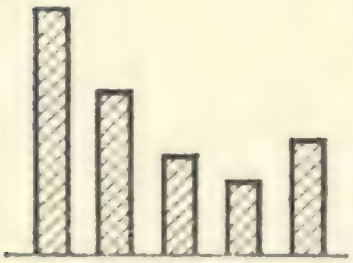


Fig. 261

α) Fiind dată o serie în care valorile corespund la amplitudini egale, se obţine o reprezentare printr-o *histogramă*, luînd pe axa orizontală o succesiune de segmente egale şi construind pe fiecare din ele ca bază, dreptunghiuri a căror înălţime este proporţională cu frecvenţa corespunzătoare (fig. 262).

β) Dacă în mijlocul fiecărui segment orizontal se ridică o ordonată egală cu frecvenţa şi se unesc

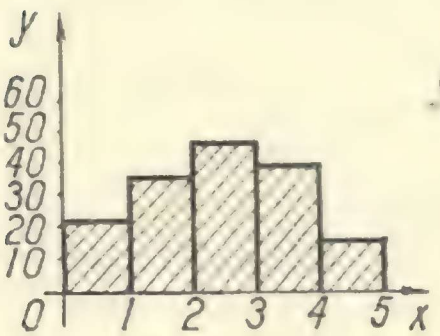



Fig. 262

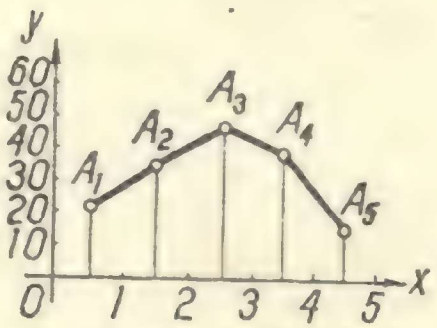



Fig. 263

capetele acestor ordonate se obţine un *poligon al frecvenţelor* (fig. 263); construcţia s-a făcut pe baza histogramei din fig. 262.

**4. Elementele tipice ale unei serii statistice.**
a) *Modul (dominanta)* este valoarea caracteristică corespunzătoare celei mai mari frecvenţe.
b) *Mediana* unei serii este numărul $x_0$, astfel ca să existe tot atîtea unităţi statistice corespunzătoare valorilor mai mici ca $x_0$ cu cele corespunzătoare valorilor mai mari ca $x_0$.
c) *Media aritmetică* a $n$ valori $x_1, \ldots, x_n$ este

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

d) *Valoarea medie* este

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

unde $f_i$ sînt frecvenţele relative şi corespunde mediei din calculul probabilităţilor (§ 9.3.4).
e) *Dispersia* este (§ 9.3.5)

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^n.$$

*Abaterea medie pătratică* este expresia $\sigma$ şi indică gradul de împrăştiere a valorilor în jurul mediei.
**5. Problemele de bază ale statisticii matematice.**
a) Legităţile proprii fenomenelor întîmplătoare de masă sînt cu atît mai pregnante cu cît volumul materialului obţinut prin observări este mai mare.

În practică de obicei se dispune de o cantitate redusă de date ceea ce face ca rezultatele obținute pe baza lor să fie influențate de elemente întîmplătoare. Prima problemă este de a ne da seama care dintre trăsături sînt permanente și deci caracteristice fenomenului pe care îl studiem. Deci, în această problemă trebuie să știm care sînt metodele care păstrează aceste caracteristici și le elimină pe celelalte. Ansamblul acestor metode se referă la *tehnica ajustării* datelor statistice.

b) Cu datele pe care le avem la dispoziție se vor face unele ipoteze asupra caracterului legității statistice care apare în fenomenul cercetat și pe care trebuie apoi să le *verifice* cu ajutorul materialului de care dispunem.

c) A treia problemă este *estimarea* parametrilor necunoscuți care intră în legile admise. Statistica matematică oferă matode specifice pentru estimarea mediei, dispersiei și eventual a altor valori tipice. Se pune de asemenea problema de a se determina *precizia* cu care s-au efectuat calculele.


BeatriceGloria_personal library